

# Задача Арнольда

С. Белёв<sup>1</sup>

Р. Парпалак<sup>2</sup>

Д. Уткин<sup>3</sup>

12 октября 2012 г.

## Аннотация

В работе рассмотрена задача из сборника В. И. Арнольда [1] о максимальной разности между числом черных и белых областей шахматной раскраски дополнения к  $n$  прямым на плоскости.

Эта задача является нерешенной математической проблемой (в [1] нет комментариев к ней). Оценка сверху и снизу была получена Юрием Чекановым [2]. Вывод оценки сверху элементарен. Вывод оценки снизу гораздо сложнее. Он основан на свойствах эллиптических кривых и здесь не рассматривается. Обе эти оценки растут как  $\sim n^2/6$  и отличаются на  $O(n)$ .

Основной результат этой работы заключается в компьютерном исследовании поведения точного решения при начальных  $n$  (в районе нескольких десятков) и в открытии класса точных решений для  $n = 3, 5, 9, 17, 33\dots$  На всех найденных точных решениях (за исключением  $n = 11$ ) оценка сверху достигается.

Помимо вывода оценки сверху и обсуждения результатов компьютерных вычислений, в работе подробно исследуются свойства конфигураций прямых и выполняется построение бесконечного класса решений.

---

<sup>1</sup>МФТИ, ЛТФ ОИЯИ (bsd@dgap.mipt.ru)

<sup>2</sup>МФТИ, ЛТФ ОИЯИ (parpalak@dgap.mipt.ru)

<sup>3</sup>МФТИ, ЛИТ ОИЯИ (ud1@mail.ru)

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>3</b>
1.1	Формулировка . . . . .	3
1.2	Корректность формулировки . . . . .	3
1.3	Исследование частных случаев . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Особенности оптимальных конфигураций прямых</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Формулировка на алгебраическом языке</b>	<b>7</b>
3.1	Карты метро . . . . .	7
3.2	Генераторы . . . . .	8
3.3	Генераторы и шахматная раскраска . . . . .	9
3.4	Группа кос и симметрическая группа . . . . .	11
3.5	Параллельные прямые . . . . .	12
3.6	Свойства допустимых наборов генераторов . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Свойства максимальной разности <math>A(n, k)</math></b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Оценка сверху</b>	<b>16</b>
5.1	Идея оценки . . . . .	16
5.2	Вычисления . . . . .	16
5.3	Свойства шахматной раскраски оптимальных конфигураций . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Точные решения</b>	<b>19</b>
6.1	Понятие оберток . . . . .	19
6.2	Построение параболической обертки . . . . .	20
6.3	Классы решений . . . . .	23
6.4	О распрямляемости простейшего класса решений . . . . .	24
6.5	Эллиптические и гиперболические обертки . . . . .	27
<b>7</b>	<b>Распрямляемость</b>	<b>30</b>
7.1	Существование нераспрямляемых конфигураций . . . . .	30
7.2	Некоторые замечания о проблеме распрямляемости . . . . .	32
<b>8</b>	<b>Компьютерные вычисления</b>	<b>34</b>
8.1	Результаты . . . . .	34
8.2	Анализ результатов. Комбинированная оценка . . . . .	40
8.3	Классы решений . . . . .	41
<b>A</b>	<b>Приложение</b>	<b>43</b>
A.1	Примеры конфигураций . . . . .	43
A.2	О нераспрямляемости одной конфигурации . . . . .	56
A.3	Направления дальнейших исследований . . . . .	60
A.3.1	Природа дефектов . . . . .	60
A.3.2	Симметрия . . . . .	60
A.3.3	Поиск других оберток . . . . .	60
	<b>Литература</b>	<b>61</b>

# 1 Постановка задачи

## 1.1 Формулировка

На плоскости проведены  $n$  прямых. Найти максимальную разность между числом черных и числом белых областей шахматной раскраски дополнения [1].

## 1.2 Корректность формулировки

**Определение 1.** Будем называть раскраску *шахматной*, если любые две области, граничащие по отрезку или лучу, раскрашены в разные цвета (черный и белый).

Пусть задана произвольная конфигурация из  $n$  прямых. Докажем по индукции, что образовавшиеся области можно раскрасить в шахматном порядке. При  $n = 1$  прямая делит плоскость на две полуплоскости, и для них шахматная раскраска, очевидно, существует. Предположим, что она существует и для  $n - 1$  прямых, и проведем  $n$ -ную прямую. Эта прямая разобьет некоторые области пополам. Обратим цвета областей в одной полуплоскости относительно  $n$ -ной прямой и сохраним в другой. Получим шахматную раскраску всей плоскости.

## 1.3 Исследование частных случаев

Оптимальные конфигурации, на которых разность достигает максимума, легко найти перебором для нескольких первых  $n$ . При  $n = 1$  имеем одну прямую и разность  $A = 0$ . При  $n = 2$  оптимальной является конфигурация из двух параллельных прямых, для которой  $A = 1$ . На рис. 1...4 приведены оптимальные конфигурации для  $n = 3, 4, 5, 6$ .

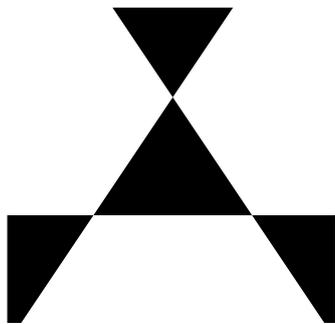


Рис. 1.  $n = 3$ , разность  $A = 1$

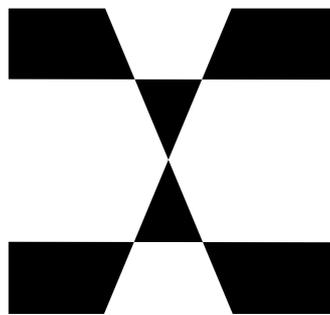


Рис. 2.  $n = 4$ , разность  $A = 2$

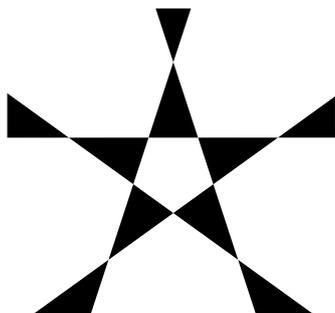


Рис. 3.  $n = 5$ , разность  $A = 4$

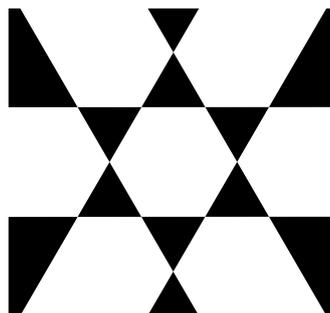


Рис. 4.  $n = 6$ , разность  $A = 5$

## 2 Особенности оптимальных конфигураций прямых

**Определение 2.** Будем называть конфигурацию из  $n$  прямых *оптимальной*, если на ней достигается максимум разности между числом черных и белых областей.

В этом разделе мы выясним, какие взаимные расположения прямых заведомо недопустимы в оптимальных конфигурациях. В дальнейших построениях такие расположения мы будем исключать с самого начала.

**Теорема 1.** В оптимальных конфигурациях нет точек пересечения трех и большего количества прямых.

*Доказательство от противного.* Пусть в оптимальной конфигурации существуют точки пересечения трех и большего числа прямых. Сначала рассмотрим случай одной точки.

Пусть в ней пересекаются три прямые (рис. 5). Выполним параллельный перенос одной из прямых на малое расстояние, чтобы на месте рассматриваемой точки образовался новый треугольник, а остальные области не изменили взаимного расположения. Из рисунка видно, что в зависимости от направления смещения может образоваться либо черный, либо белый треугольник. Таким образом, в оптимальной по предположению конфигурации можно создать новую область заранее заданного цвета и увеличить разность на 1. Противоречие.



Рис. 5. Пересечение трех прямых в одной точке и смещение одной из них. К доказательству теоремы 1

Пусть в одной точке пересекаются четыре прямые. Выполним параллельный перенос одной из них. При этом образуются два новых треугольника (белый и черный) без изменения разности. Оставшиеся три прямые пересекаются в одной точке, и смещение одной из них, как было показано выше, приведет к увеличению разности на 1. Конфигурация с точкой пересечения четырех прямых не является оптимальной.

Доказательство для точек пересечения пяти и большего количества прямых проводится аналогично.

Рассмотрим случай нескольких точек. Если не найдется двух таких точек, лежащих на одной прямой, то их можно рассматривать независимо друг от друга и применить к одной из них изложенное выше доказательство

Теперь рассмотрим прямую, на которой лежат несколько таких точек (рис. 6). Будем передвигать ее параллельно самой себе. Из предыдущего рассмотрения ясно, что если прямую сдвинуть в одну сторону, и разность изменится на  $a$ , то при сдвиге в другую сторону разность изменится на  $-a$ . Если  $a \neq 0$ , то утверждение теоремы верно. Если  $a = 0$ , то дополнительно переместим прямую следующим образом. Выделим одну из двух крайних точек (для определенности на рис. 6 выбрана крайняя левая

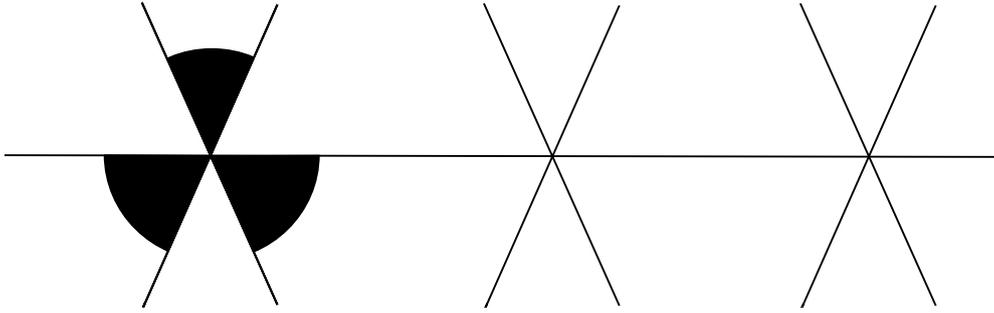


Рис. 6. Точки пересечения нескольких прямых лежат на одной прямой. К доказательству теоремы 1

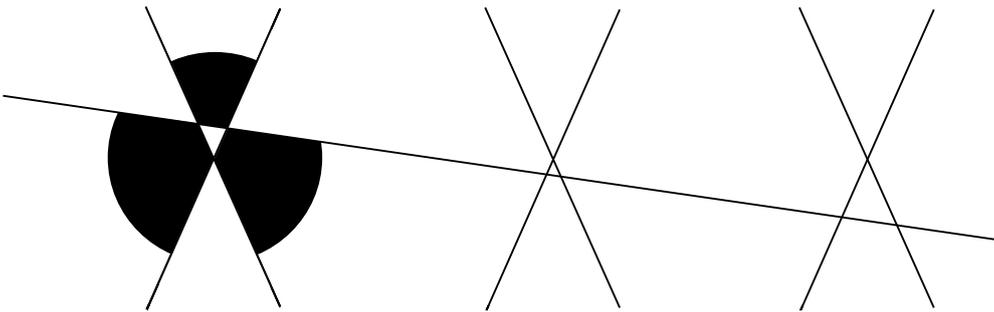


Рис. 7. К доказательству теоремы 1

точка) и повернем прямую на малый угол так, чтобы выделенная точка оказалась с одной стороны от прямой, а все остальные точки — с другой стороны (рис. 7).

Без ограничения общности можно считать, что в крайней точке пересекается нечетное количество прямых. Если это не так, мы можем переместить одну из прямых на малое расстояние и получить нечетное количество прямых, проходящих через крайнюю точку.

Поскольку в крайней точке пересекается нечетное количество прямых, переход от рис. 6 к рис. 7 приведет к изменению разности на 2 (в большую или меньшую сторону). Действительно, такое преобразование есть комбинация параллельного переноса, не изменяющего разность, и «схлопывания» треугольника (см. рис. 5), инвертирующего его цвет и изменяющего общую разность на 2. Переход от рис. 6 к рис. 8 по тем же соображениям меняет разность в противоположную сторону. Таким образом, в оптимальных конфигурациях не могут встретиться точки пересечения трех и большего количества прямых, располагающиеся на одной прямой.

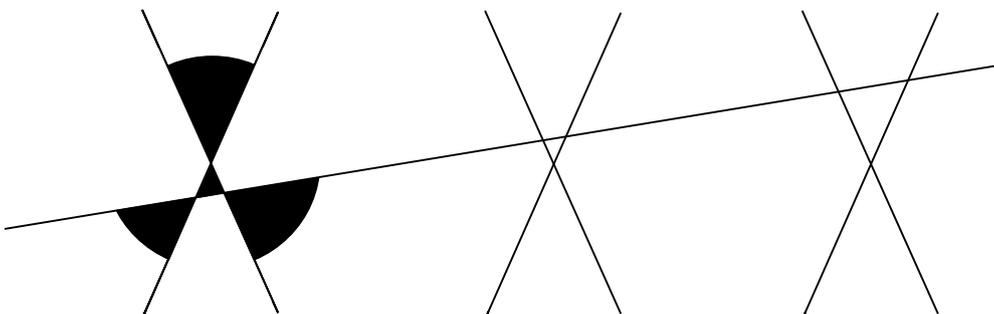


Рис. 8. К доказательству теоремы 1

В завершение заметим, что возможное наличие параллельных прямых не приводит к существенному усложнению рассуждений. Действительно, присутствие других прямых, параллельных данной, с точки зрения появления новых областей и исчезновения старых важно только при поворотах, а не при параллельном переносе. Выше мы использовали повороты при переходе от рис. 6 к рис. 7 и 8. Когда к прямой на рис. 6 среди оставшихся прямых можно подобрать параллельные, их также нужно подвергать определенным преобразованиям. Если на них нет точек пересечения трех и большего количества прямых, их нужно поворачивать синхронно с прямой на рис. 6, не разрушая параллельность.

В противном случае предварительно необходимо выполнить параллельный перенос каждой из параллельных прямых. Как следует из предыдущего рассмотрения, при сдвиге в одну сторону разность будет меняться на  $a$ , в другую сторону на  $-a$ . Если  $a \neq 0$ , доказательство можно завершать, если же  $a = 0$  для всех параллельных прямых, такой параллельный перенос избавляет параллельные прямые от точек пересечения многих прямых и сводит доказательство к уже рассмотренному случаю.

Мы рассмотрели все возможные варианты расположения точек пересечения многих прямых в конфигурациях и показали, что в каждом варианте можно увеличить разность. Следовательно, конфигурации не являются оптимальными. Противоречие.  $\square$

Рассмотрим теперь, могут ли прямые в конфигурациях быть параллельными. В общем случае прямые из любого конечного набора естественным образом разделяются на «группы параллельности», в каждой из которых прямые попарно параллельны. Такие группы могут содержать две и больше прямых.

**Теорема 2.** *В оптимальной конфигурации параллельные прямые могут встречаться только парами.*

Доказательство теоремы заключается в расширении евклидовой плоскости до проективной плоскости и применении предыдущей теоремы.

Другой способ доказательства состоит в появлении новых областей нужного цвета при повороте прямых на малые углы. Например, на рис. 9 изображены три параллельных прямых на большом удалении от остальных прямых конфигурации. Поворачивая их на малые углы, мы изменяем только те области, которые изображены на рис. 10. Видно, что появились две черные области и одна белая. Другими поворотами можно было получить две белые области и одну черную и изменить разность в другую сторону. Аналогично исключаются и остальные варианты, читатель может убедиться в этом самостоятельно.



Рис. 9. Три параллельных прямых в конфигурации. Остальные линии находятся далеко (нет на рисунке).  
К доказательству теоремы 2

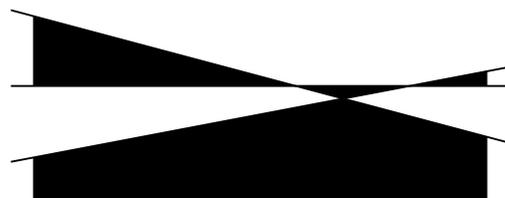


Рис. 10. Три параллельных прямых после поворотов на малые углы.  
К доказательству теоремы 2

### 3 Формулировка на алгебраическом языке

Одним из способов переформулировки задачи на алгебраическом языке является построение *карт метро*, к которому мы и приступаем. Для простоты переформулируем задачу в случае, когда параллельных прямых в конфигурации нет. Затем (в разделе 3.5) мы рассмотрим, каким образом можно учитывать наличие параллельных прямых.

#### 3.1 Карты метро

Проведем вспомогательную прямую (назовем ее *сканирующей*) достаточно далеко от всех точек пересечения так, чтобы она пересекла все прямые конфигурации. Перенумеруем их числами от 1 до  $n$  в порядке пересечения сканирующей прямой.

Начнем передвигать сканирующую прямую параллельно самой себе. Каждый раз после прохождения через точку пересечения прямых конфигурации будем выписывать, в каком порядке они пересекают сканирующую прямую. Когда все точки пересечения будут пройдены, прямые будут пересекать сканирующую прямую в обратном порядке.

**Пример.** Проведем описанную процедуру для следующей конфигурации из четырех прямых (рис. 11).

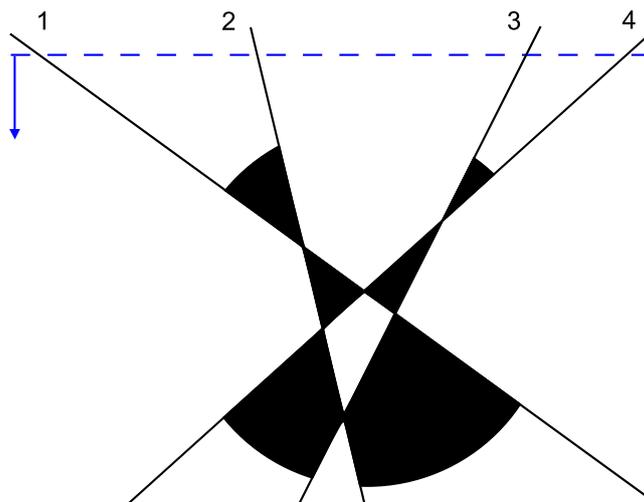


Рис. 11. Конфигурация из четырех прямых и сканирующая прямая (пунктирная линия)

Движение сканирующей прямой вдоль конфигурации дает следующие наборы номеров:

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 2 & 3 & 4 \\
 1 & 2 & 4 & 3 \\
 \mathbf{2} & 1 & 4 & 3 \\
 2 & 4 & \mathbf{1} & 3 \\
 2 & 4 & \mathbf{3} & 1 \\
 4 & \mathbf{2} & 3 & 1 \\
 4 & \mathbf{3} & \mathbf{2} & 1
 \end{array} \tag{1}$$

Схематически их можно изобразить «косичкой» (рис. 12).

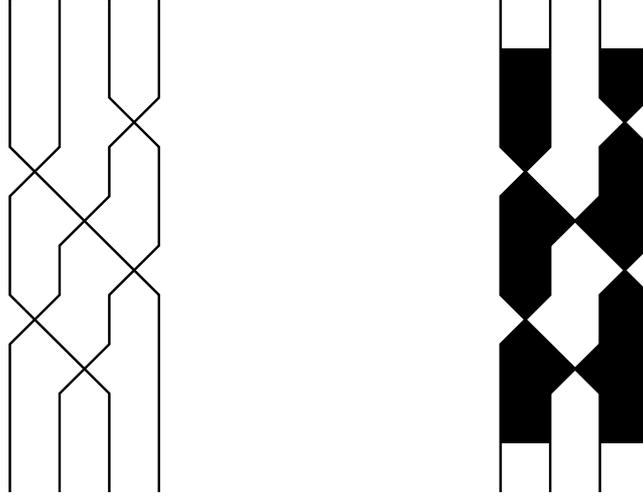


Рис. 12. Пример карты метро и шахматная раскраска (справа)

**Определение 3.** Такие «косички» будем называть *картами метро*<sup>1</sup>.

### 3.2 Генераторы

На разобранном выше примере видна следующая общая закономерность. Каждой возможной конфигурации прямых можно сопоставить набор перестановок (например, (1)) их номеров. Начальная перестановка — единичная:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix},$$

конечная — «максимальная»:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В силу теоремы 1 каждая следующая перестановка в наборе отличается от предыдущей тем, что числа в позициях  $i$  и  $i+1$  для некоторого  $i$  переставлены местами.

Ясно, что запись конфигурации при помощи набора перестановок избыточна. Для упрощения записи введем понятие генератора.

**Определение 4.** Назовем *генератором*  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) оператор, действующий на перестановку и меняющий местами числа, стоящие в позициях  $i$  и  $i+1$ .

Рассмотрим, как связаны генераторы  $\sigma_i$  с элементарными перестановками вида

$$\sigma_i(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i+1 & i & \dots & n \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Для некоторой перестановки  $\pi$  можно записать произведение

$$\begin{aligned} \sigma_i(\mathbb{I}) \cdot \pi &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i+1 & i & \dots & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ \pi_1 & \dots & \pi_i & \pi_{i+1} & \dots & \pi_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ \pi_1 & \dots & \pi_{i+1} & \pi_i & \dots & \pi_n \end{pmatrix} \equiv \sigma_i(\pi). \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Фактически под термином «карта метро» понимается набор из  $n$  линий с некоторыми ограничениями, присущими конфигурациям из прямых. Линии могут изгибаться, но по-прежнему пары линий должны пересекаться только в одной точке, каждая линия должна пересекать все остальные и т. д. Такой набор линий можно привести к «стандартному виду» вроде изображенного на рис. 12.

Таким образом, действие генератора  $\sigma_i$  на перестановку  $\pi$  сводится к домножению слева на элементарную перестановку (3):

$$\sigma_i(\pi) = \sigma_i(\mathbb{I}) \cdot \pi. \quad (4)$$

Как известно, любую перестановку можно представить в виде произведения соседних транспозиций, то есть в виде упорядоченного набора генераторов

$$G = (g_j \mid g_j \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}),$$

действующих последовательно на единичную перестановку.

**Определение 5.** Последовательность генераторов, представляющую «максимальную» перестановку (2), будем называть *допустимой*.

Количество генераторов в допустимой последовательности совпадает с числом  $V_n$  точек пересечения в конфигурации прямых:

$$V_n = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (5)$$

Вместо того чтобы для каждой конфигурации выписывать перестановки (как это сделано выше при обсуждении карт метро), будем выписывать генераторы. Так, для разобранного примера карты метро (рис. 12) последовательность генераторов следующая<sup>2</sup>:

$$G = (\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2).$$

Наборы генераторов, которые получаются из конфигураций прямых, по построению являются допустимы (конфигурация прямых является своей картой метро). Забегая вперед, заметим, что не всякому допустимому набору генераторов соответствует какая-либо конфигурация прямых.

### 3.3 Генераторы и шахматная раскраска

Посмотрим, каким образом генераторы позволяют описывать области, на которые плоскость разбивается прямыми. Из рис. 12 видно, что применение генератора  $\sigma_i$  к перестановке на каком-то шаге получения карты метро «рождает» новую область. Сопоставим каждому генератору (точке пересечения) область, расположенную на карте метро «ниже». Цвет этой области зависит только от четности номера генератора  $i$ . Например, на рис. 12 «четные» генераторы порождают белые области, а «нечетные» генераторы — черные.

Помимо областей, сопоставленных генераторам, имеются области (в количестве  $n+1$ ), которым генераторы не сопоставляются. Сканирующая прямая в начальном положении пересекает именно эти области (так как «выше» этих областей нет ни одного генератора). Если  $n$  нечетно, то такие области не дают вклада в искомую разность (черных и белых среди них одинаковое количество), а если  $n$  четно, то вклад в разность соответствует одному четному генератору. Для примера опять обратимся

<sup>2</sup> Заметим, что если нужно провести обратное преобразование, то есть получить набор перестановок вроде (1) по набору генераторов из элементарных перестановок (3), их нужно перемножать в обратном порядке, что следует из (4). Например, в (1) входят следующие перестановки:  $\sigma_3(\mathbb{I})$ ,  $\sigma_1(\mathbb{I}) \cdot \sigma_3(\mathbb{I})$ ,  $\sigma_2(\mathbb{I}) \cdot \sigma_1(\mathbb{I}) \cdot \sigma_3(\mathbb{I})$  и т. д.

к рис. 12: цвет левой и правой внешних областей белый, области такого же цвета порождаются генератором  $\sigma_2$ .

Таким образом, для каждой допустимой последовательности генераторов  $G_0 = (g_j | g_j \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\})$  можно определить функцию  $A(G_0)$ , дающую разность между числом черных и белых областей шахматной раскраски:

$$A(G_0) = \left| \sum_j (-1)^{\#(g_j)} + 2 \left\{ \frac{n+1}{2} \right\} \right|. \quad (6)$$

Символ  $\#(g_j)$  означает номер генератора, то есть  $\#(\sigma_i) = i$ . Первое слагаемое в (6) описывает области, сопоставленные генераторам, а второе учитывает вклад от оставшихся областей, соответствующий одному четному генератору. Индекс у  $G$  обозначает количество пар параллельных прямых (ниже мы рассмотрим, как изменится эта формула для конфигураций с параллельными прямыми).

Применим формулу к разобранному примеру (рис. 12):

$$\begin{aligned} A(G_0) &= \left| (-1)^3 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^1 + (-1)^2 + 2 \left\{ \frac{4+1}{2} \right\} \right| = \\ &= |-1 - 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1| = 1. \end{aligned}$$

Получился правильный ответ.

Заметим, что из рассуждений, обосновывающих формулу (6), следует, что общее количество областей  $F_n$  на плоскости есть

$$F_n = V_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1, \quad (7)$$

где  $V_n$  — количество точек пересечения (см. формулу (5)).

**Определение 6.** Допустимую последовательность генераторов  $G_0$  будем называть *оптимальной*, если на ней достигается максимум функции (6).

Таким образом, первоначальную задачу о прямых на плоскости можно разбить на две подзадачи:

1. Найти наибольшее значение функции  $A(G_0)$  на множестве допустимых последовательностей генераторов (решить более общую задачу не для прямых, а для карт метро).
2. Доказать, что карта метро, соответствующая оптимальной последовательности генераторов, распрямляема, то есть существует конфигурация из прямых, из которой можно получить данную карту метро.

Дальнейшее изложение посвящено первой задаче. Ее формулировка позволяет вывести ряд свойств искомой функции (раздел 4), сделать оценки (раздел 5), найти ее значения для некоторых  $n$  как из теоретических соображений (раздел 6), так и вычислительным путем (раздел 8).

Вторая задача в общем случае может не иметь решения. Результаты вычислений показывают, что при небольших  $n$  почти все карты метро распрямляются. В разделе 6.4 доказана распрямляемость одного бесконечного класса конфигураций. Однако существуют и нераспрямляемые карты метро. Мы приведем пример такой карты метро и подробнее обсудим распрямляемость в разделе 7.

### 3.4 Группа кос и симметрическая группа

Вернемся к картам метро и «косичкам», которые их изображают (см. рис. 12). Такие косички описываются группой кос. Напомним определение и некоторые свойства этой группы [3].

**Определение 7.** *Группа кос  $B_n$  порождается набором образующих элементов  $b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , удовлетворяющих следующим соотношениям:*

$$b_i b_j = b_j b_i, \quad |i - j| \geq 2, \quad (8)$$

$$b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}. \quad (9)$$

**Теорема 3 (Артин).** *Две последовательности образующих элементов эквивалентны (то есть равны одному и тому же элементу группы кос) тогда и только тогда, когда одну из последовательностей можно привести к другой при помощи коммутационных соотношений (8) и (9).*

Покажем, что генераторы  $\sigma_i$  аналогичны образующим  $b_i$  группы кос за исключением дополнительного условия

$$\sigma_i^2 = 1, \quad (10)$$

которое означает, что  $\sigma_i$  порождают симметрическую группу порядка  $n$ .

Действительно, преобразование (8) меняет порядок, в котором следуют пересечения несцепленных пар линий на карте метро. Результат действия преобразования (8) на последовательность генераторов приводит к топологически эквивалентной карте метро. Преобразование (9) сложнее, так как оно приводит к топологически отличной конфигурации. Последовательность генераторов вида  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$  соответствует треугольной области. Преобразование (9) уничтожает эту область (стягивает ее в точку) и рождает новую треугольную область противоположного цвета.

Строго говоря, соотношение (10) имеет ограниченный смысл. Возведение генератора в квадрат  $\sigma_i^2$  не определено. Карта метро, соответствующая  $\sigma_i^2$ , содержит линии, пересекающиеся в двух точках. Но такие карты метро не могут быть получены из конфигураций прямых. Мы не будем рассматривать последовательности генераторов, содержащие квадраты генераторов  $\sigma_i^2$ , либо приводимые к ним последовательности (путем применения преобразований (8) и (9)).

Для удобства теоретических выкладок можно говорить о соотношении (10). В отличие от группы кос, где пара косичек перекрещивается двумя способами ( $b_i$  и  $b_i^{-1}$ ), линии на карте метро перекрещиваются только одним способом ( $\sigma_i$  не имеет обратного элемента). Мы же будем считать, что  $\sigma_i$  имеет обратный элемент и совпадает с ним. Такое допущение ни на чем не сказывается, так мы исключили из рассмотрения конфигурации, содержащие  $\sigma_i^2$ , но оно позволяет рассматривать генераторы как образующие симметрической группы.

Симметрическая группа является подгруппой группы кос. К ее образующим  $\sigma_i$  можно непосредственно применять теорему Артина.

**Теорема 4 (Следствие из теоремы Артина).** *Все допустимые последовательности генераторов для данного  $n$  можно получить из одной произвольной допустимой последовательности применением соотношений (8) и (9).*

*Доказательство.* По определению любая допустимая последовательность генераторов представляет «максимальный» элемент (2) симметрической группы. Это значит, что, с точки зрения группы кос, все допустимые последовательности генераторов эквивалентны. Теперь следствие из теоремы Артина очевидно.  $\square$

### 3.5 Параллельные прямые

До сих пор мы предполагали, что параллельные прямые отсутствуют. Перейдем к общему случаю.

Любую конфигурацию с параллельными прямыми можно получить из конфигурации, где параллельных прямых нет. Для этого нужно удалить некоторые точки пересечения прямых на бесконечность. На языке генераторов такое удаление точек пересечения означает удаление некоторых генераторов из последовательности.

Из рис. 12 видно, что отбрасывать можно последние генераторы. Конечно, можно отбрасывать и первые генераторы, но это, как мы увидим ниже (см. теорему о перебрасывании генераторов), ничего нового не дает.

Отбрасываемые генераторы должны коммутировать (то есть удовлетворять соотношению (8)). Если отбросить некомутирующие генераторы, нарушится теорема 2 и пятый постулат Евклидовой геометрии — через точку, не лежащую на прямой, будут проходить две прямые, параллельные данной.

По теореме 2 параллельные прямые встречаются только парами. В дальнейшем число пар будем обозначать через  $k$ , а последовательности, в которых отброшено  $k$  генераторов, через  $G_k$ . Единственное изменение формулы (6), очевидно, заключается в том, что отброшенные генераторы не дают вклада в сумму. Ясно, что разные значения  $k$  приводят к различному ответу. Поэтому мы будем считать  $k$  вторым параметром (первый — количество прямых  $n$ ). Таким образом, функция  $A(n, k)$ , дающая ответ на задачу, есть:

$$A(n, k) = \max_{G_k} A(G_k) \quad (11)$$

Требование коммутативности отбрасываемых генераторов приводит к ограничению  $k \leq n/2$ . Впрочем, это ограничение очевидно из геометрического смысла задачи.

Отброшенные генераторы всегда можно восстановить (с точностью до несущественной перестановки коммутирующих генераторов). Для удобства мы будем их не отбрасывать, а «брать в скобки».

Формулы (5) и (7), определяющие число точек пересечения  $V_{n,k}$  и число областей  $F_{n,k}$ , при учете параллельных прямых принимают следующий вид:

$$V_{n,k} = \frac{n(n-1)}{2} - k, \quad (12)$$

$$F_{n,k} = V_{n,k} + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1 - k. \quad (13)$$

### 3.6 Свойства допустимых наборов генераторов

**Теорема 5.** *Четность разности  $A(G_k)$  постоянна на множестве допустимых последовательностей генераторов  $G_k$  при данных  $n$  и  $k$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную допустимую последовательность  $G_k$ . Из формулы (6) для разности  $A(G_k)$  следует, что применение коммутационного соотношения (8) к набору  $G_k$  оставляет разность неизменной, а применение коммутационного соотношения (9) изменяет разность на 2. Таким образом, четность разности  $A(G_k)$  инвариантна относительно преобразований (8) и (9). По следствию из теоремы Артина все допустимые последовательности можно получить из  $G_k$ , применяя соотношения (8) и (9). Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 6** (о перебрасывании генераторов). *Генератор из конца допустимой последовательности  $G_0$  можно перебрасывать в начало и наоборот, при этом  $G_0$  переходит в другую допустимую последовательность, если во время перебрасывания генератор меняется по следующему правилу:*

$$\sigma_i \rightarrow \sigma_{n-i}.$$

*Доказательство.* Обратим внимание на то, что теорема сформулирована для случая, когда параллельные прямые отсутствуют.

Рассмотрим произвольную карту метро. Выделим в ней крайнюю нижнюю точку пересечения (именно ей соответствует последний генератор). Мы можем удалить эту точку на бесконечность и получить пару параллельных прямых. Затем эту пару параллельных прямых можно пересечь с другой стороны, сверху. Этой точке пересечения будет соответствовать первый генератор.

Пусть в конце последовательности был генератор  $\sigma_i$ . Это значит, что рассматриваемые прямые находились в последней перестановке на местах  $i$  и  $i + 1$ . Из свойств карт метро, а именно из того, что карта метро является представлением максимального элемента группы перестановок, следует, что эти прямые в самом начале стоят на местах  $n + 1 - i$  и  $n - i$ . Поэтому начальный генератор, перекрещивающий эти прямые, есть  $\sigma_{n-i}$ .  $\square$

## 4 Свойства максимальной разности $A(n, k)$

Обсудим ряд свойств искомой функции  $A(n, k)$ , которые понадобятся нам в дальнейшем.

**Теорема 7.** «Дискретная непрерывность»:

$$|A(n, k + 1) - A(n, k)| = 1. \quad (14)$$

*Доказательство от противного.* Во-первых, заметим, что  $A(n, k)$  и  $A(n, k + 1)$  не могут быть равными, так как имеют различную четность. Действительно, если в оптимальной последовательности  $G_k$  взять в скобки еще один генератор, разность изменится на 1, изменится и четность разности. По теореме 5 четность разности  $A(G_{k+1})$  новой последовательности  $G_{k+1}$  совпадет с четностью разности  $A(n, k + 1)$ .

Во-вторых, предположим, что

$$|A(n, k + 1) - A(n, k)| > 1.$$

Рассмотрим случай, когда

$$A(n, k) - A(n, k + 1) > 1.$$

Но для последовательности  $G_{k+1}$ , построенной выше,

$$|A(n, k) - A(G_{k+1})| = 1.$$

Используя эти выражения, получаем неравенство

$$A(n, k + 1) < A(n, k) - 1 \leq A(G_{k+1}),$$

что противоречит определению функции  $A(n, k)$  (11). Второй случай рассматривается аналогично. Противоречие.  $\square$

**Теорема 8.** Если  $n$  — нечетное, предыдущее свойство можно усилить:

$$A(n, k) = A(n, 0) - k. \quad (15)$$

*Доказательство.* Достаточно показать, что при нечетном  $n$  выполняется равенство  $A(n, k) - A(n, k + 1) = 1$ . Пусть  $G_{k+1}$  — оптимальная последовательность генераторов. Вынесем из скобок произвольный генератор. При этом разница меняется на 1. Если она уменьшилась, то перенесем этот генератор из конца последовательности в начало. Действительно, в данном случае можно воспользоваться теоремой о перебрасывании генераторов, потому что в скобках стоят коммутирующие генераторы и любой из них можно вынести в конец последовательности. По этой теореме четность перенесенного генератора изменится (так как  $n$  — нечетно) и разность увеличится на 2. В итоге из оптимальной последовательности  $G_{k+1}$  всегда можно получить последовательность  $G_k$ , для которой  $A(G_k) - A(n, k + 1) = 1$ . В силу предыдущей теоремы, дающей ограничение на  $A(n, k)$ ,  $G_k$  — оптимальная последовательность.  $\square$

Как следует теоремы 8, при нечетном  $n$  максимальная разность достигается при  $k = 0$ . Таким образом, исследование этого простого случая (мы часто используем в рассуждениях фразы вроде «пусть параллельные прямые отсутствуют») охватывает случай нечетного количества прямых.

**Теорема 9.** Для любого  $m > 0$  справедливы следующие равенства:

$$A(2m - 1, 0) = A(2m, 0) = A(2m, 1) - 1. \quad (16)$$

*Доказательство.* Чтобы доказать первое равенство, мы докажем два неравенства:

$$A(2m - 1, 0) \leq A(2m, 0), \quad (17)$$

$$A(2m - 1, 0) \geq A(2m, 0). \quad (18)$$

Заметим, что оба неравенства относятся к случаю, когда параллельных прямых в конфигурации нет.

Рассмотрим оптимальную конфигурацию из  $2m - 1$  прямых. Проведем новую прямую так, чтобы она пересекла все остальные прямые, и чтобы все точки пересечения старых прямых оказались в одной полуплоскости относительно добавляемой прямой. В другой полуплоскости образуется  $2m$  новых областей конфигурации  $G_{2m}$ . Эти добавочные области не изменяют разность, так как раскрашены в шахматном порядке:

$$A(2m - 1, 0) = A(G_{2m}).$$

По определению функции  $A$ :

$$A(G_{2m}) \leq A(2m, 0).$$

Неравенство (17) доказано.

Рассмотрим оптимальную конфигурацию из  $2m$  прямых. Покажем, что от нее можно перейти к  $2m - 1$  прямой без изменения разности. Выберем произвольную прямую. При построении карты метро проведем сканирующую прямую *почти параллельно* выбранной прямой. Это значит, что точки пересечения выбранной прямой будут отвечать подпоследовательности генераторов, увеличивающихся или уменьшающихся на 1, расположенных друг за другом в основной последовательности. Перенесем эту подпоследовательность в конец последовательности. Это можно сделать,

перебрасывая остальные генераторы последовательности из конца в начало. Теорема о перебрасывании генераторов в этом случае применима, так как в конфигурации нет параллельных прямых. Ясно, что перебрасывание генераторов изменит первоначальную конфигурацию. Однако разность не изменится, так как число прямых четно и генераторы при перебрасывании сохраняют четность. Выделенная подпоследовательность генераторов, стоящая в конце, соответствует *крайней прямой*. Точки пересечения остальных прямых лежат относительно крайней прямой в одной полуплоскости, а в другой полуплоскости находится  $2m$  областей, раскрашенных в шахматном порядке. После удаления крайней прямой эти области исчезают и разность остается прежней. Таким образом,

$$A(2m - 1, 0) \geq A(G_{2m-1}) = A(2m, 0).$$

Неравенство (18) доказано.

Второе равенство в условии теоремы следует из того, что в четном случае в конец последовательности можно поставить любой генератор из этой последовательности перебрасыванием остальных генераторов из конца в начало (так как в скобках нет ни одного генератора). Описанным способом в скобки можно взять генератор заранее нужной четности, увеличив разность на 1. А это и есть максимально возможная разность  $A(2m, 1)$  в силу дискретной непрерывности. Теорема доказана.  $\square$

Следует отметить, что аналогичное равенство при других значениях  $k$  не выполняется. Рассуждения, аналогичные предыдущим, провести нельзя, так как свобода в переброске генераторов ограничена — перебрасываемые генераторы должны коммутировать со всеми генераторами в скобках.

Пояснить доказательство неравенства (18) может карта метро на рисунке 12. Последовательность генераторов для нее есть  $\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2$ . Прямая под номером 1 «почти параллельна» сканирующей прямой — ей соответствует возрастающая последовательность генераторов  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ . Два последних генератора можно перебросить в начало и получить новый набор генераторов с той же разностью:  $\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ . После отбрасывания крайней прямой (номер 1) — подпоследовательности  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  — остается последовательность генераторов (обратите внимание на перенумерацию)  $\sigma_2\sigma_1\sigma_2$ , которая есть не что иное, как треугольник — единственная (и, разумеется, оптимальная) конфигурация, которую могут образовать три прямых общего положения.

**Теорема 10.** *Для любого  $m > 0$  справедливо неравенство:*

$$A(2m, m - 1) \leq A(2m + 1, m). \quad (19)$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству неравенства (17)<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> Провести доказательство, аналогичное доказательству неравенства (18), и поставить в условии теоремы 10 знак равенства не удастся. Существование крайней прямой в оптимальной конфигурации из нечетного количества прямых не очевидно. Более того, была найдена оптимальная конфигурация (рис. 40), в которой нет крайней прямой. Однако для доказательства необходимо показать, что в нечетном случае при максимальном  $k$  существует хотя бы одна оптимальная конфигурация с крайней прямой. Сделать это нам пока не удалось, несмотря на подтверждения в практических расчетах.

## 5 Оценка сверху

Обычно мы раскрашиваем конфигурации так, что *черных областей в раскраске больше, чем белых* (и это видно на примерах). В дальнейшем изложении мы будем придерживаться этого соглашения. На примерах также видно, что черные области — чаще всего треугольники. Это наблюдение приводит к важной идее — возможности оценить искомую разность сверху из самых общих соображений.

### 5.1 Идея оценки

Каждая прямая конфигурации разбивается другими прямыми на части. Любой отрезок (или луч) граничит с одной черной и одной белой областью. При данных  $n$  и  $k$  общее количество отрезков постоянно. Мы хотим, чтобы черных областей было больше, следовательно, мы должны уменьшать количество сторон у черных областей. Наименьшим числом сторон обладает треугольник. Если мы предположим, что все черные области — треугольники, и посчитаем, сколько треугольников может вмещать в себя конфигурация, мы получим оценку сверху для числа черных областей и оценку снизу для числа белых областей (так как общее число областей тоже зависит только от  $n$  и  $k$ ). Разность этих оценок и будет оценкой сверху для искомой разности.

### 5.2 Вычисления

Выполнить подобные вычисления можно разными способами (разумеется, они дают один и тот же ответ). Мы используем метод, позволяющий, помимо оценки, получить некоторые другие полезные соотношения.

В рассматриваемых конфигурациях прямых есть два типа областей — *внутренние* и *внешние*. Внешние области, в отличие от внутренних, уходят на бесконечность. Чтобы описывать внутренние и внешние области единым образом, мы будем считать, что конфигурация вписана в «большую окружность», содержащую внутри все точки пересечения прямых. При этом дуги окружности будем считать такими же сторонами внешних областей, как и отрезки прямых.

Обозначим через  $b_i$  и  $w_i$  число черных (*black*) и белых (*white*)  $i$ -угольников соответственно,  $i > 2$ . Общее количество областей определяется формулой (13), что сразу позволяет выписать первое важное соотношение:

$$\sum_i (w_i + b_i) = \frac{n(n+1)}{2} + 1 - k. \quad (20)$$

Окружность разобьется прямыми на  $2n$  дуг (из них  $n$  черных и  $n$  белых). Поскольку к каждому отрезку прямых и каждой черной дуге примыкает одна черная область, сумма количества сторон черных областей равна количеству отрезков прямых и черных дуг. Аналогично для белых областей. Каждая прямая разбивается оставшимися прямыми на  $n$  частей (за исключением  $2k$  параллельных прямых, каждая из них разбивается на  $n - 1$  частей), поэтому количество отрезков есть  $n^2 - 2k$ . Итак, второе важное соотношение есть:

$$\sum_i iw_i = \sum_i ib_i = n^2 + n - 2k. \quad (21)$$

Выведем оценку сверху для  $A(n, k)$ . Мы предполагаем, что черные области — только треугольники, и, возможно, четырехугольники. Следовательно,  $b_i = 0$  для  $i > 4$ . Тогда из (21):

$$\begin{aligned} 3b_3 + 4b_4 &= n^2 + n - 2k, \\ b_3 \rightarrow \max &\Rightarrow b_4 = (n^2 + n - 2k) \pmod{3}, \\ b_3 + b_4 &= \left\lfloor \frac{n^2 + n - 2k}{3} \right\rfloor. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (20):

$$\begin{aligned} \sum_i w_i &= \frac{n(n+1)}{2} + 1 - k - \sum_i b_i, \\ A &= \sum_i b_i - \sum_i w_i = 2 \sum_i b_i - \frac{n(n+1)}{2} - 1 + k = \\ &= 2(b_3 + b_4) - \frac{n(n+1)}{2} - 1 + k = \\ &= \frac{2}{3}(3(b_3 + b_4) + b_4) - \frac{2}{3}b_4 - \frac{1}{2}(n^2 + n - 2k) = \\ &= \frac{2}{3}(n^2 + n - 2k) - \frac{1}{2}(n^2 + n - 2k) - 1 - \frac{2}{3}b_4 = \\ &= \frac{n^2 + n - 2k}{6} - 1 - \frac{2}{3}b_4. \end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$A(n, k) \leq \bar{A}(n, k) = \frac{n^2 + n}{6} - \frac{k}{3} - 1 - 2 \left\lfloor \frac{n^2 + n - 2k}{3} \right\rfloor. \quad (23)$$

Мы вывели оценку сверху для искомой разности. В разделе 6 мы докажем существование бесконечного количества конфигураций, на которых достигается эта оценка.

Конечно, хотелось бы найти ответ к задаче в виде формулы, похожей на (23). Однако, как показывает практика, формула (23) не является окончательным ответом. В разделе 8 мы обсудим отличия результатов практических вычислений от оценки (23) и способы ее улучшения.

Причина отличий состоит в начальном предположении — черные области совсем не обязательно должны быть треугольниками. Но это начальное предположение и сама оценка позволяют ввести новую терминологию, к чему мы и переходим.

### 5.3 Свойства шахматной раскраски оптимальных конфигураций

Мы зафиксировали цвета раскраски (черных областей не меньше, чем белых). Теперь сформулируем и докажем свойства шахматной раскраски оптимальных конфигураций.

**Определение 8.** Назовем *дефектом* черную область, у которой больше трех сторон.

Обычно под дефектами мы понимаем черные четырехугольники, так как именно эту форму имеют дефекты во всех известных нам оптимальных конфигурациях<sup>4</sup>.

Конфигурации, на которых достигается оценка сверху (23), могут обладать одним или двумя дефектами. Именно за это отвечает последнее слагаемое в (23). Число дефектов есть  $(n^2 + n - 2k) \pmod{3}$  (см. также вывод формулы (22)). Если у конфигурации больше трех дефектов, разность будет меньше оценки (23).

Ясно, что дефекты ответственны за любое несоответствие между оценкой сверху и значением разности заданной конфигурации. Понятие числа дефектов можно обобщить и выразить из (23) через известные величины:

$$b_4 = \frac{3}{2} \left( \frac{n^2 + n}{6} - \frac{k}{3} - 1 - A(n, k) \right). \quad (24)$$

При этом  $b_4$  совпадает с настоящим количеством дефектов, только если все они — четырехугольники.

**Теорема 11.** *В оптимальной конфигурации нет белых треугольников.*

*Доказательство от противного.* Пусть в некоторой конфигурации имеется белый треугольник. На карте метро любой треугольник можно стянуть в точку и превратить в треугольник противоположного цвета. На языке генераторов это означает применение коммутационного соотношения (9) (подробнее этот вопрос рассмотрен в обсуждении данного коммутационного соотношения). Превращение белого треугольника в черный увеличит разность на 2. Следовательно, конфигурация с белым треугольником не может быть оптимальной.  $\square$

**Теорема 12.** *В конфигурации без дефектов нет белых четырехугольников.*

*Доказательство от противного.* Предположим, что в оптимальной конфигурации есть белый четырехугольник. С ним соседствуют четыре черных области. Поскольку конфигурация оптимальна и в ней нет дефектов, эти четыре области должны быть треугольниками.

Рассмотрим противоположные стороны белого четырехугольника. Очевидно, они лежат на паре линий, на которых также должны лежать и стороны двух соседних треугольников. Любые две стороны треугольников пересекаются, следовательно, рассматриваемая пара линий пересекается в двух точках, что невозможно. Противоречие.  $\square$

**Теорема 13.** *В оптимальной конфигурации без дефектов между количеством пятиугольников, семиугольников, восьмиугольников, девятиугольников и т. д. существует следующее соотношение:*

$$w_5 - w_7 - 2w_8 - 3w_9 - \dots = 6. \quad (25)$$

*Доказательство.*  $b_4 = 0$ , так как конфигурация бездефектная. Выразим  $b_3$  из (22), подставим в (20), умножим полученное равенство на 6 и вычтем из него (21). Из теорем 11 и 12 следует, что  $w_3 = w_4 = 0$ . Учитывая это, получим доказываемое соотношение.  $\square$

---

<sup>4</sup>Правда, нам не известны теоретические ограничения, которые помешали бы появлению в оптимальных конфигурациях, например, пятиугольных дефектов.

## 6 Точные решения

### 6.1 Понятие оберток

Перейдем теперь от общих закономерностей к конкретным конфигурациям. Некоторые примеры распрямленных конфигураций приведены в разделе А.1 (стр. 43).

Рассмотрим бездефектные конфигурации, изображенные на рис. 15, 16 и 17. Их изучение выявляет следующую особенность. В этих конфигурациях можно выделить оптимальную конфигурацию с меньшим количеством прямых, образующую с остальными прямыми простой бездефектный узор.

Так, к оптимальной конфигурации из 8 прямых (рис. 13) можно добавить еще 8 прямых, образующих правильный многоугольник, и получить бездефектную конфигурацию (рис. 15). Одну из 9 прямых в оптимальной конфигурации (рис. 14) можно заменить на 9 прямых (рис. 16), переплетенных с оставшимися прямыми, и получить оптимальную конфигурацию.

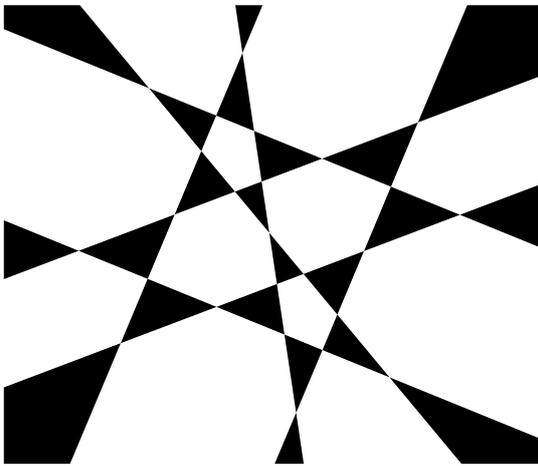


Рис. 13.  $A(8, 3) = 10$

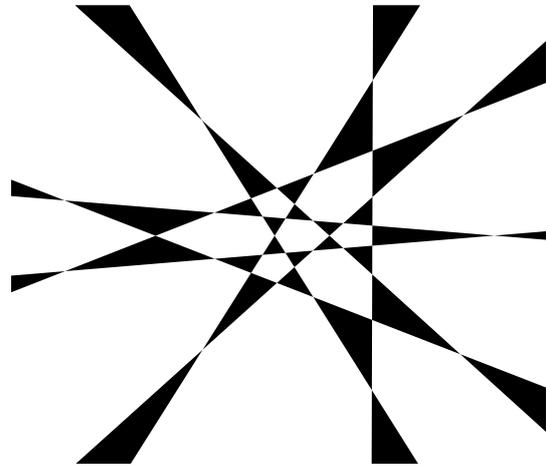


Рис. 14.  $A(9, 0) = 14$

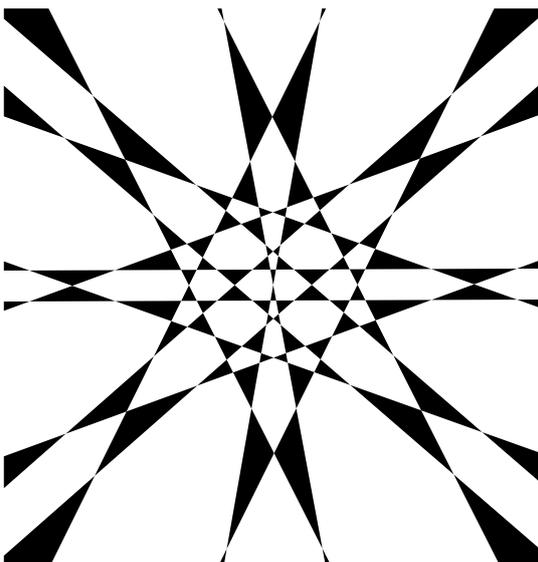


Рис. 15.  $A(16, 7) = 42$ .  
Пример эллиптической обертки

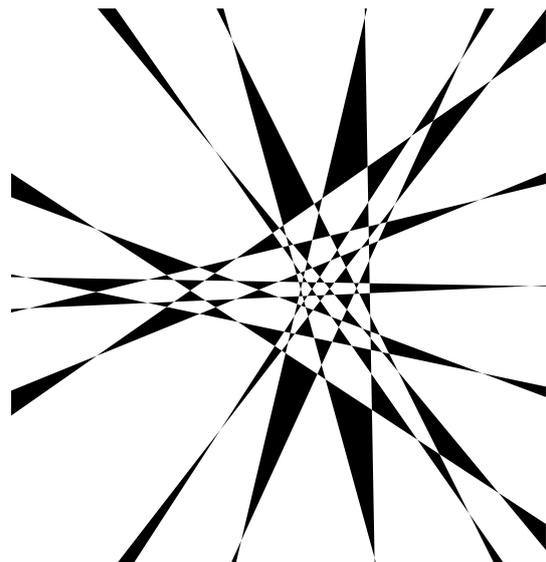


Рис. 16.  $A(17, 0) = 50$ .  
Пример гиперболической обертки

Либо к 9 прямым на рис. 14 можно добавить еще 8 прямых и снова получить оптимальную конфигурацию (рис. 17).

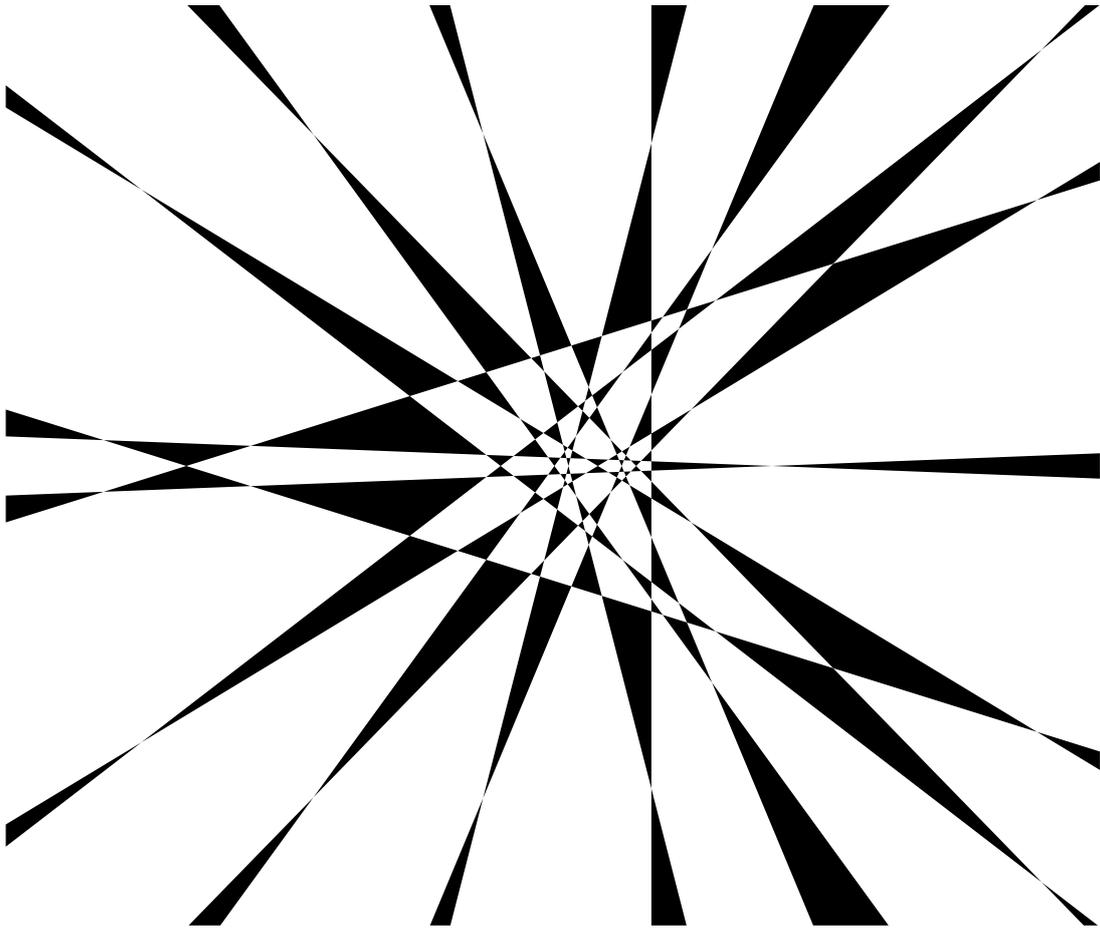


Рис. 17.  $A(17, 0) = 50$ . Пример параболической обертки

Оказывается, эти способы построения конфигураций универсальны. Можно взять произвольную карту метро, одним из трех способов дорисовать прямые и при определенных ограничениях на количество прямых получить новые конфигурации без появления новых дефектов. Эти методы построения конфигураций мы называем соответственно *эллиптическими*, *гиперболическими* и *параболическими обертками*. Сначала мы подробно разберем параболическую обертку, а потом обсудим связь между всеми обертками и объясним происхождение таких названий.

## 6.2 Построение параболической обертки

Пример обертки<sup>5</sup> приведен на рис. 17, а ее геометрический смысл состоит в следующем. Пусть задана конфигурация из нечетного количества ( $n$ ) прямых. К ним можно добавить еще  $n - 1$  прямых без изменения внутренних областей так, что число дефектов не изменится. Дефекты, которые были в начальной конфигурации, сохраняются, новые дефекты не добавляются.

Как следует из теоремы 8, в оптимальных конфигурациях для нечетного  $n$  нет параллельных прямых. При обсуждении обертки будем полагать  $k = 0$ .

<sup>5</sup>Далее для краткости мы будем подразумевать под оберткой именно параболическую обертку и опускать слово «параболическая», пока не перейдем к обсуждению других обертков (в разделе 6.5).

Проведение снаружи прямых эквивалентно добавлению новых генераторов к старым. Опишем процедуру построения обертки и выведем ее замечательные свойства.

**Определение 9.** Назовем *основой обертки*  $W_n$ , где  $n$  — нечетно,  $n \geq 3$ , следующий набор генераторов:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \sigma_n & & & \\
 & & \sigma_{n-1} & & \sigma_{n+1} & & \\
 \hline
 & & & & & \sigma_{n+2} & \\
 & & & & \sigma_{n+1} & & \\
 & & & \sigma_n & & & \\
 & & \sigma_{n-1} & & & & \\
 & \sigma_{n-2} & & & & & \\
 \hline
 \sigma_{n-3} & & \sigma_{n-1} & & \sigma_{n+1} & & \sigma_{n+3} \\
 \hline
 & & & \dots & & & \\
 & & & & & \sigma_{2n-3} & \\
 & & & & & \sigma_{2n-4} & \\
 & & & & \dots & & \\
 & & \sigma_4 & & & & \\
 & \sigma_3 & & & & & \\
 \hline
 \sigma_2 & & \sigma_4 & \dots & \sigma_{2n-4} & & \sigma_{2n-2}
 \end{array} \tag{26}$$

Основа обертки является составной частью новой конфигурации. Наряду с указанной последовательностью генераторов нам понадобится такая же последовательность, только записанная в обратном порядке. Ее будем называть *обратной основой обертки* и обозначать через  $W_n^{-1}$ .

**Лемма 1.** Перестановка  $\tilde{W}_n = W_n(\mathbb{I})$ , порождаемая основой обертки  $W_n$ , имеет следующий вид<sup>6</sup>:

$$\left( 1 \ 2n-2 \ 2 \ 2n-4 \ \dots \ \frac{n+1}{2} \ \dots \ 2n-3 \ n-1 \ 2n-1 \ n \right) \tag{27}$$

*Доказательство по индукции.* При  $n = 3$  лемма верна. Действительно,  $W_3 = \sigma_3\sigma_2\sigma_4$  дает перестановку  $\left( 1 \ 4 \ 2 \ 5 \ 3 \right)$ , совпадающую с (27) при  $n = 3$ .

Предположим, что  $W_n$  порождает (27). Рассмотрим набор генераторов  $W_{n+2}$ . Из определения (26) следует, что его можно разбить на две части. Первая часть отличается от  $W_n$  сдвигом генераторов на 2. По предположению индукции она порождает перестановку

$$\left( 1 \ 2 \ 3 \ 2n \ 4 \ 2n-2 \ \dots \ 2n-1 \ n+1 \ 2n+1 \ n+2 \ 2n+2 \ 2n+3 \right).$$

Вторая часть есть  $\sigma_{2n+1}\sigma_{2n}\dots\sigma_3\sigma_2\sigma_4\sigma_6\dots\sigma_{2n}\sigma_{2n+2}$ . Генераторы  $\sigma_{2n+1}\sigma_{2n}\dots\sigma_3\sigma_2$  перемещают линию  $2n+2$  на второе место:

$$\left( 1 \ 2n+2 \ 2 \ 3 \ 2n \ 4 \ 2n-2 \ \dots \ 2n-1 \ n+1 \ 2n+1 \ n+2 \ 2n+3 \right).$$

Оставшиеся генераторы  $\sigma_4\sigma_6\dots\sigma_{2n}\sigma_{2n+2}$  меняют местами соседние линии:  $3 \longleftrightarrow 2n$ ,  $4 \longleftrightarrow 2n-2$  и т. д., вплоть до  $n+2 \longleftrightarrow 2n+3$ . В результате получаем:

$$\left( 1 \ 2n+2 \ 2 \ 2n \ 3 \ 2n-2 \ 4 \ \dots \ n \ 2n+1 \ n+1 \ 2n+3 \ n+2 \right).$$

Эта перестановка получается из (27) при замене  $n$  на  $n+2$ . Лемма доказана.  $\square$

<sup>6</sup> В этом разделе мы будем выписывать перестановки в сокращенном виде, первую строчку с числами от 1 до  $n$  будем опускать.

Ясно, что обратная основа обертки  $W_n^{-1}$  порождает перестановку, обратную к (27).

Пусть  $G_n$  — допустимый набор генераторов для  $n$  прямых, где  $n$  — нечетно. В результате обертывания из него получается следующий набор генераторов:

$$G_{2n-1} = W_n^{-1} G_n \sigma_{n+1} \sigma_{n+3} \dots \sigma_{2n-2} W_n. \quad (28)$$

**Теорема 14.** *Если  $n$  — нечетно, и набор генераторов  $G_n$  является допустимым, то является допустимым и набор (28).*

*Доказательство.* Так как набор генераторов  $G_n$  — допустимый, он порождает максимальную перестановку (2). Поэтому последовательность  $G_n \sigma_{n+1} \sigma_{n+3} \dots \sigma_{2n-2}$  дает перестановку

$$\tilde{G}_n = (n \ n-1 \ \dots \ 2 \ 1 \ n+2 \ n+1 \ \dots \ 2n-1 \ 2n-2).$$

По лемме 1 основа обертки  $W_n$  порождает перестановку  $\tilde{W}_n$ . Нам нужно доказать, что  $\tilde{W}_n \cdot \tilde{G}_n \cdot \tilde{W}_n^{-1}$  есть максимальная перестановка (2) для  $2n-1$  прямой (обратите внимание на обратный порядок сомножителей в произведении перестановок; подробнее этот вопрос обсуждался в сноске 2).  $\tilde{W}_n \cdot \tilde{G}_n$  легко вычислить:

$$(n \ 2n-1 \ n-1 \ 2n-3 \ \dots \ \frac{n+1}{2} \ \dots \ 2n-4 \ 2 \ 2n-2 \ 1).$$

Если умножить эту перестановку на перестановку, обратную к (27), получим максимальную перестановку (2).  $\square$

**Лемма 2.** *Разность между числом «четных» и «нечетных» генераторов в основе обертки  $W_n$  есть*

$$A(W_n) = \left( \frac{n-1}{2} \right)^2.$$

*Доказательство по индукции.* Проверим это утверждение при  $n=3$ . Основа обертки состоит из генераторов  $W_3 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_4$ . Очевидно, утверждение верно:

$$A(W_3) = 1 = \left( \frac{3-1}{2} \right)^2.$$

Пусть лемма верна для  $W_n$ . Как уже отмечалось, основа обертки  $W_{n+2}$  состоит из генераторов  $W_n$ , сдвинутых на 2, и генераторов  $\sigma_{2n+1} \sigma_{2n} \dots \sigma_3 \sigma_2 \sigma_4 \sigma_6 \dots \sigma_{2n} \sigma_{2n+2}$ . Сдвиг генераторов на 2 не влияет на разность. Тогда

$$A(W_{n+2}) = A(W_n) + (-1)^{2n+1} + (-1)^{2n} + \dots + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1)^4 + (-1)^6 + \dots + (-1)^{2n} + (-1)^{2n+2}.$$

Вклад от генераторов  $\sigma_{2n+1} \sigma_{2n} \dots \sigma_3 \sigma_2$  взаимно уничтожается, в добавке остаются  $n$  четных генераторов  $\sigma_4 \sigma_6 \dots \sigma_{2n} \sigma_{2n+2}$ .

$$A(W_{n+2}) = \left( \frac{n-1}{2} \right)^2 + n = \left( \frac{n+1}{2} \right)^2.$$

Лемма доказана.  $\square$

**Теорема 15.** При обертывании (28) произвольной конфигурации  $G_n$  количество дефектов не меняется.

*Доказательство.* Без ограничения общности можно считать, что в  $G_n$  «четных» генераторов больше, чем «нечетных». Если это не так, выполним в  $G_n$  преобразование  $\sigma_i \rightarrow \sigma_{n-i}$ , меняющее четность генераторов. Геометрический смысл такого преобразования — зеркальное отражение и инвертирование раскраски конфигурации. Таким образом, в каждом элементе обертки (28) «четных» генераторов больше, чем «нечетных».

Как следует из (6), для нечетного количества прямых разность между числом генераторов разной четности совпадает с искомой разностью между числом черных и белых областей. Для общей разности  $A(G_{2n-1})$  получаем:

$$A(G_{2n-1}) = A(W_n) + A(G_n) + \frac{n-1}{2} + A(W_n).$$

Предпоследнее слагаемое учитывает вклад от четных генераторов  $\sigma_{n+1}\sigma_{n+3}\dots\sigma_{2n-2}$ . Количество этих генераторов есть  $(n-1)/2$ .

При  $k=0$  выражение (24) для числа дефектов принимает вид

$$b_4^{(n)} = \frac{3}{2} \left( \frac{n^2 + n}{6} - 1 - A(G_n) \right).$$

Используя лемму 2, вычислим  $b_4^{(2n-1)}$ :

$$\begin{aligned} b_4^{(2n-1)} &= \frac{3}{2} \left( \frac{(2n-1)^2 + 2n-1}{6} - 1 - A(G_{2n-1}) \right) = \\ &= \frac{3}{2} \left( \frac{2n(2n-1)}{6} - 1 - A(G_n) - \frac{(n-1)^2}{2} - \frac{n-1}{2} \right) = \\ &= \frac{3}{2} \left( \frac{4n^2 - 2n - 3n^2 + 6n - 3 - 3n + 3}{6} - 1 - A(G_n) \right) = \\ &= \frac{3}{2} \left( \frac{n^2 + n}{6} - 1 - A(G_n) \right), \end{aligned}$$

$$b_4^{(2n-1)} = b_4^{(n)}.$$

□

### 6.3 Классы решений

Процедура построения обертки позволяет получать бесконечные классы конфигураций. Действительно, возьмем конфигурацию из  $n$  прямых. Согласно (28) ее можно обернуть и получить конфигурацию из  $2n-1$  прямых. Новая конфигурация также поддается обертыванию. Ясно, что этот процесс можно повторять до бесконечности. В полученном классе будут конфигурации с количеством прямых

$$(n-1)2^l + 1, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Если начальная конфигурация была оптимальной, то все конфигурации в классе будут оптимальными. Простейший класс<sup>7</sup> оптимальных конфигураций порождается треугольником — оптимальной конфигурацией для  $n = 3$  (рис. 1). В этом классе присутствуют такие конфигурации:  $n = 5$  (рис. 3),  $n = 9$  (рис. 14),  $n = 17$  (рис. 17),  $n = 33$  (рис. 50) и т. д. Другие классы решений обсудим в следующем разделе, посвященном результатам вычислений, а сейчас остановимся на замечательной особенности данного простейшего класса — возможности доказать его распрямляемость (напомним, что до сих пор мы работали не с конфигурациями прямых, а с картами метро — наборами гибких линий).

## 6.4 О распрямляемости простейшего класса решений

Доказательство распрямляемости решений из простейшего класса несколько неожиданно и необычно. Оно основано на одном не очень известном свойстве параболы, которое мы сформулируем в лемме 3. После этого определим требования к «параболически обертываемым» конфигурациям, затем докажем, что такие конфигурации действительно можно обернуть, и в завершение применим эти построения к простейшему классу конфигураций.

**Лемма 3.** *Точки пересечения двух касательных к параболе  $y = ax^2$ ,  $a > 0$ , пересекающих ось абсцисс под углами  $\alpha$  и  $\beta$ , при фиксированном  $\gamma = \alpha + \beta$  лежат на прямой, проходящей через фокус параболы, причем каждому значению  $\gamma$  соответствует своя прямая.*

*Доказательство.* Уравнение касательной к параболе в точке  $x_0$ :

$$y = ax_0^2 + 2ax_0(x - x_0) = 2ax_0x - ax_0^2.$$

Переходим к угловому коэффициенту  $\operatorname{tg} \alpha = 2ax_0$ :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{4a}. \quad (29)$$

Объединим уравнения касательных для угловых коэффициентов  $\operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{tg} \beta$  в систему. Ее решения задают искомое геометрическое место точек:

$$x = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{4a}, \quad y = \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{4a}.$$

Из формулы для тангенса суммы:

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{4ax}{1 - 4ay}.$$

Окончательно получаем:

$$y = \frac{1}{4a} - \frac{x}{\operatorname{tg} \gamma}. \quad (30)$$

Это уравнение прямой, проходящей через фокус параболы  $(0, 1/4a)$ .  $\square$

<sup>7</sup> Открытие оберток, как и любое настоящее открытие, было сделано совершенно случайно. Один из вариантов программы для поиска зеркально-симметричных конфигураций стал моментально выдавать конфигурации из этого простейшего класса. Как оказалось, они практически целиком состоят из оберток. Мы выделили обертку и показали, что оборачивать можно произвольные конфигурации, а не только конфигурации данного класса.

**Определение 10.** Конфигурацию из  $n$  прямых, где  $n$  — нечетно, будем называть *параболически обертываемой*, если выполняются следующие требования:

1. Существуют две прямые, которые можно совместить перемещениями и поворотами, причем в процессе такого движения вплоть до момента полного совмещения конфигурация не должна топологически изменяться (количество сторон у каждой области должно оставаться неизменным). Предельное положение пары прямых будем называть *осью конфигурации*.
2. Ось конфигурации и остальные прямые образуют между собой равные углы.

Отметим, что можно выбрать такую систему координат, в которой уравнения прямых из параболически обертываемой конфигурации будут иметь вид, похожий на (30):

$$y = d_i + \frac{1}{4a} - \frac{x}{\operatorname{tg} \gamma_i}, \quad (31)$$

где  $d_i$  — произвольные положительные числа, а углы  $\gamma_i$  определяются условиями

$$\gamma_i = \pi \frac{i}{n-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2; \quad \gamma_{n-1} = -\gamma_n = \varepsilon. \quad (32)$$

Здесь  $\varepsilon$  может быть сколь угодно малой величиной. Заметим также, что для любого положительного  $M$  можно выполнить масштабное преобразование (например, сжатие с коэффициентом  $\max\{d_i\}/M$ ), которое не приведет к топологическому изменению конфигурации, но ограничит числа  $d_i$  величиной  $M$ .

**Теорема 16.** *Если обернуть параболически обертываемую конфигурацию, снова получится параболически обертываемая конфигурация.*

*Доказательство.* Чтобы доказать эту теорему, необходимо сделать три шага. Во-первых, построить обернутую конфигурацию из  $2n - 1$  прямых для произвольной параболически обертываемой конфигурации из  $n$  прямых. Во-вторых, доказать параболическую обертываемость построенной конфигурации. В-третьих, доказать то, что в результате построения действительно получится обертка. В отличие от остальных теорем, в этом доказательстве мы не будем стремиться к строгости и заменим третий шаг демонстрацией чертежа и интуитивными соображениями.

Приступим к построению обернутой конфигурации. Возьмем параболу и проведем к ней под равными углами  $n - 1$  касательных таким образом, чтобы полученная картина была симметрична относительно оси параболы (рис. 18, в этом примере  $n = 9$ ). Уравнения проведенных касательных имеют вид (29), где  $\alpha_i = \pi(i - 1/2)/(n - 1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Через фокус проведем набор из  $n - 2$  прямых, определяемых формулой (31) при  $d_i = 0$ . Как следует из леммы 3, эти прямые пройдут через точки пересечения касательных (рис. 19). Так образуются точки пересечения трех прямых.

Если выполнить параллельный перенос прямых, проходящих через фокус, на малое расстояние  $M$  (рис. 20), то точки пересечения трех прямых превратятся в треугольники, и образуется характерная для обертки структура из треугольников и шестиугольников. В этом параллельном переносе имеется определенная «свобода»: прямые можно перемещать независимо на разные расстояния  $d_i \leq M$ . За счет этой свободы на месте фокуса параболы можно разместить любую параболически обертываемую конфигурацию. Для этого достаточно выбрать нужным образом числа  $d_i$

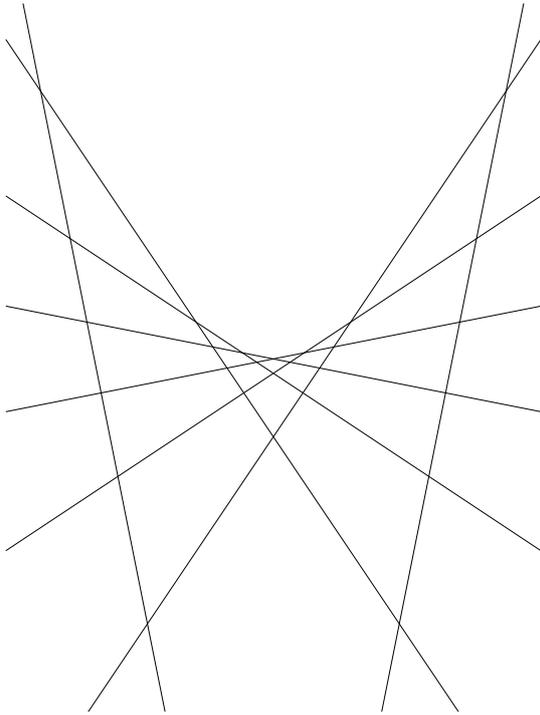


Рис. 18. Касательные к параболе

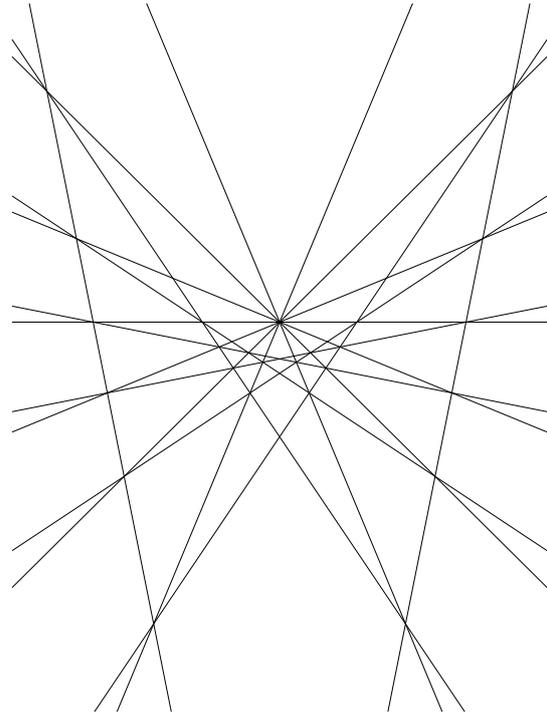


Рис. 19. Прямые через фокус

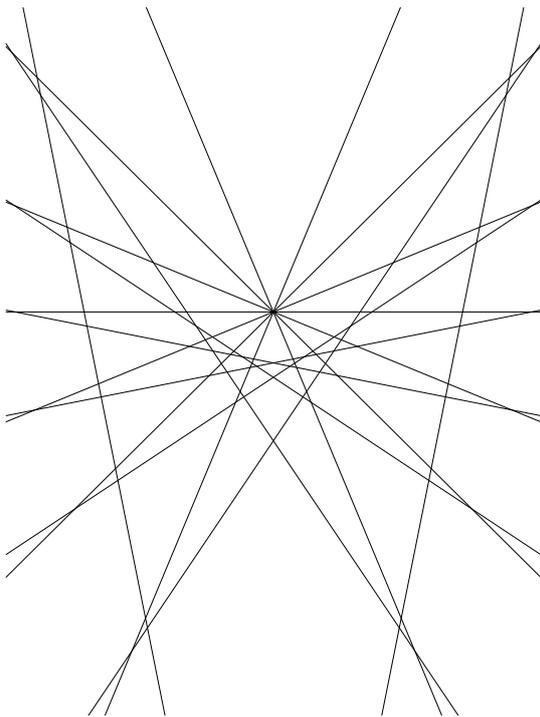


Рис. 20. Прямые смещены вверх

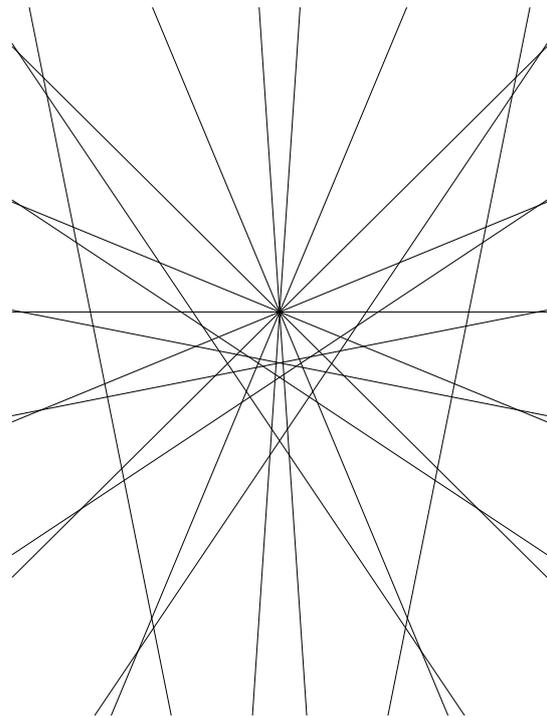


Рис. 21. Завершающие прямые

и провести оставшиеся две прямые, образующие ось конфигурации, так, чтобы ось конфигурации совпала с осью симметрии параболы (рис. 21).

Покажем теперь, что построенная конфигурация является параболически обертываемой. Во-первых, между прямыми, образующими ось старой конфигурации, находятся только точки пересечения прямых обертки, лежащие на самой оси. Поэтому две прямые можно по-прежнему совместить поворотами и перемещениями без изме-

нения самой конфигурации, то есть оси старой и новой конфигураций совпадают<sup>8</sup>. Во-вторых, по построению касательные прямые и прямые, проходящие через фокус, образуют равные углы, величина которых составляет  $\pi/(2n - 2)$ .

Мы не будем доказывать, что в результате описанного построения получается именно обертка. Укажем лишь на сходство полученного рисунка 21 и «оберточной» конфигурации из 17 прямых (рис. 17) и ограничимся замечанием о том, что это общая закономерность.  $\square$

Простейший класс решений образуется многократным обертыванием треугольника ( $n = 3$ ). Ясно, что треугольник является параболически обертываемой конфигурацией. Из теоремы 16 следует, что любое решение из простейшего класса является параболически обертываемой конфигурацией прямых. Таким образом, распрямляемость простейшего класса решений доказана.

## 6.5 Эллиптические и гиперболические обертки

Основное свойство обертки состоит в том, что добавляемые прямые пересекаются со старыми прямыми и образуют простой бездефектный узор.

Вернемся к конфигурации на рис. 15. Она получена из оптимальной конфигурации для  $n = 8$  добавлением *эллиптической обертки*. Эллиптическая обертка может быть применена к произвольной карте метро. Новые дефекты не будут появляться, если количество прямых кратно четырем.

Эллиптическая обертка, как и параболическая, может порождать классы решений. Самый простой класс решений содержит такие конфигурации:  $n = 4$  (рис. 2),  $n = 8$  (рис. 13),  $n = 16$  (рис. 15) и т. д. В этом классе  $k = n/2 - 1$ , и только две первые конфигурации оптимальны. Остальные конфигурации бездефектны. Однако этот класс всё равно представляет определенный интерес.

Во-первых, из любой конфигурации простейшего эллиптического класса можно получить оптимальную конфигурацию, добавив всего одну прямую. Добавляемая прямая должна проходить так, как показано на рис. 22, а параллельные прямые нужно пересечь для устранения дефектов.

Вопреки ожиданиям такое видоизменение конфигураций в некотором смысле не дает ничего нового, так как приводит к оптимальным конфигурациям с таким же количеством прямых, как и в простейшем параболическом классе решений.

Стоит отметить, что существует и «обратное» преобразование. У конфигураций из простейшего параболического класса по построению есть крайняя прямая. Эту крайнюю прямую и некоторые точки пересечения можно удалить и получить бездефектные конфигурации с таким же количеством прямых и пар параллельных прямых, как у конфигураций из простейшего эллиптического класса (пример такой конфигурации приведен на рис. 42).

Во-вторых, есть возможность доказать распрямляемость простейшего эллиптического класса. Эллиптическая обертка может быть получена как система касательных к окружности, расположенных под равными углами друг к другу. Такая система касательных обладает свойством, аналогичным лемме 3. Действительно, из соображений симметрии все точки пересечения касательных должны располагаться на ради-

---

<sup>8</sup> При многократном обертывании точки пересечения из новых обертки, не лежащие на оси симметрии, будут подходить к ней всё ближе и ближе, поэтому мы и потребовали от параболически обертываемой конфигурации возможность сколь угодно сблизить одну из пар прямых.

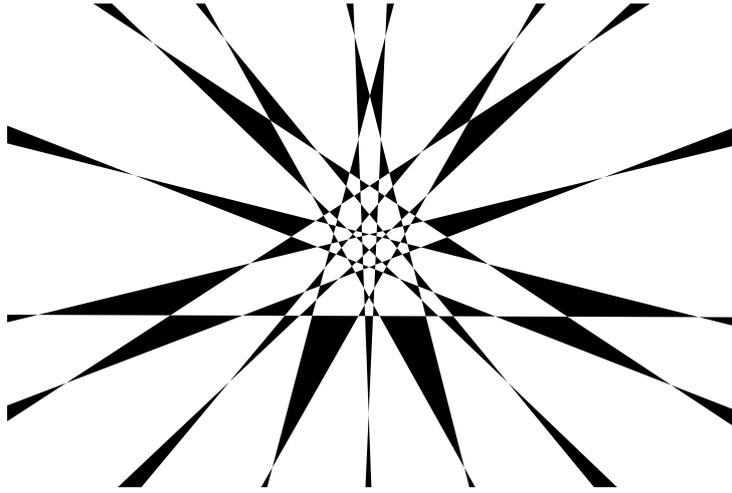


Рис. 22.  $A(17, 0) = 50$ . Конфигурация получена добавлением одной прямой к эллиптической обертке

альных прямых (рис. 23). Поэтому доказательство эллиптической распрямляемости аналогично доказательству параболической распрямляемости.

Отметим, что доказательство леммы 3 можно было проводить по-другому. Как известно, существует проективное преобразование, переводящее окружность в параболу. При таком преобразовании касательные прямые переходят в касательные прямые, и из системы прямых, изображенных на рис. 23, получается система прямых, изображенная на рис. 24. Таким образом, любое проективное преобразование окружности в параболу дает именно такую систему прямых, которая встречается в параболической обертке<sup>9</sup>.

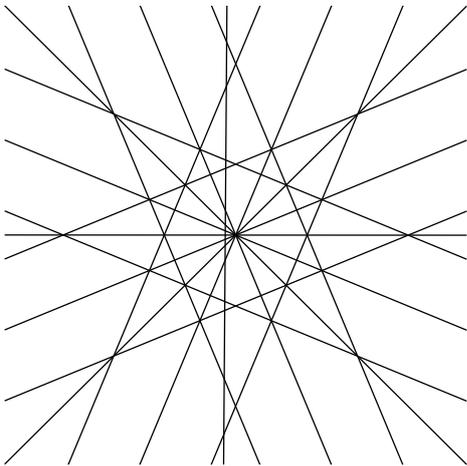


Рис. 23. Система касательных к окружности и радиальные линии

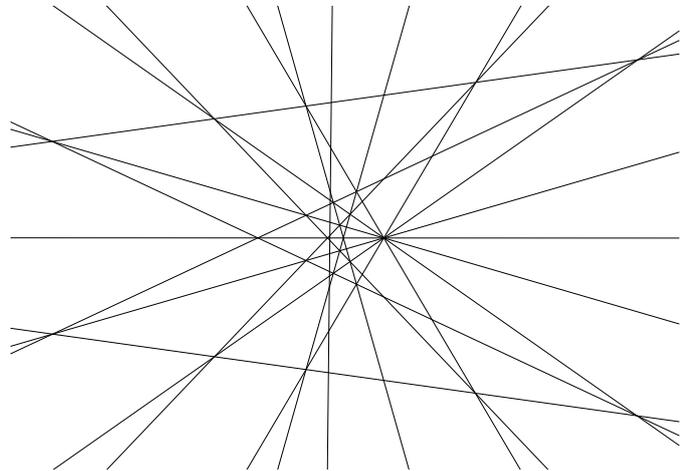


Рис. 24. Касательные и радиальные прямые после проективного преобразования

<sup>9</sup> Ради справедливости заметим, что доказательство леммы 3 не было лишним упражнением. Благодаря одинаковым углам (именно это следует из леммы) между соседними касательными мы доказали распрямляемость простейшего класса решений. А углы между соседними касательными к параболе после проективного преобразования не будут одинаковыми. Чтобы получить нужные углы, нужно либо подбирать параметры проективного преобразования, либо рассматривать предельный переход центральной проекции, когда центр проекции стремится к центру проектируемой окружности. В любом случае новое доказательство оказалось бы сложнее.

На рис. 16 приведена *гиперболическая обертка*. Она похожа на параболическую обертку тем, что ее можно применять к таким же картам метро и получать конфигурации с таким же количеством прямых. На этом сходство и заканчивается. Чтобы построить гиперболическую обертку, нужно не добавлять прямые, а заменить одну из  $n$  прямых на сетку, состоящую тоже из  $n$  прямых.

Как и остальные обертки, гиперболическая обертка подчиняется свойству, аналогичному лемме 3. Она может быть представлена как система касательных к гиперболе, причем касательные можно выбрать так, что их точки пересечения будут лежать на некотором пучке прямых. Самый простой способ убедиться в этом — выполнить проективное преобразование окружности в гиперболу и проследить за касательными и радиальными линиями. Пример такого проективного преобразования приведен на рис. 25

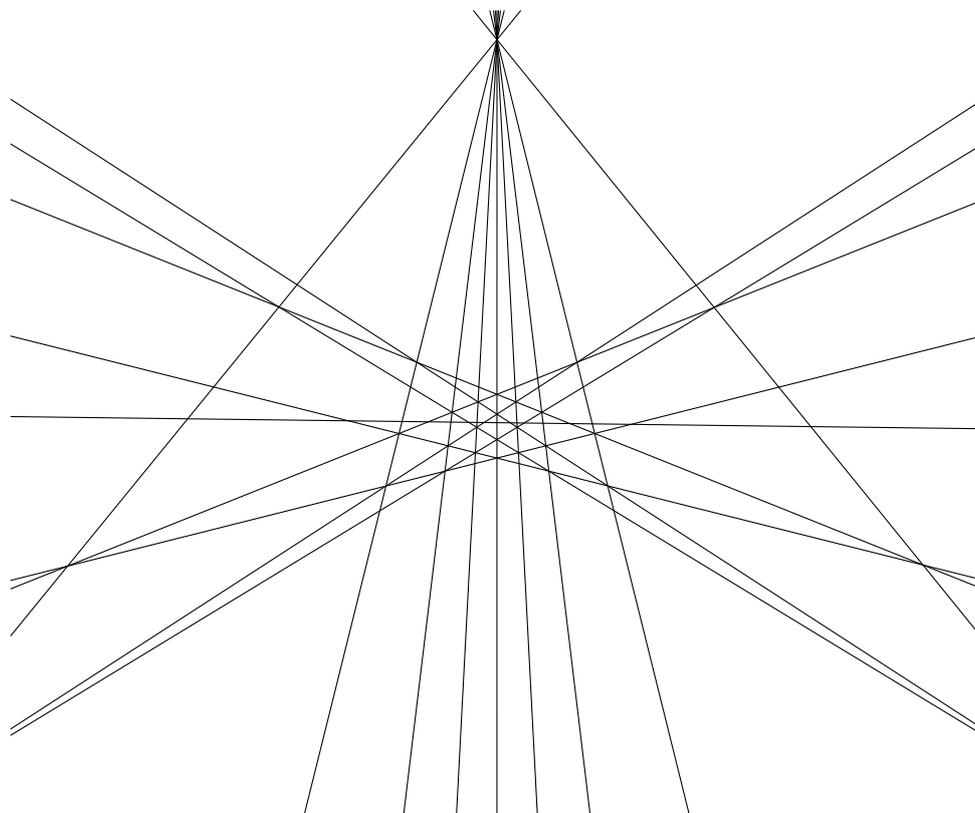


Рис. 25. Касательные и радиальные линии после проективного преобразования

Возможно, наличие такого свойства позволяет строить распрямляемые классы конфигураций с помощью гиперболической обертки. Однако это нам пока не удалось. Также не ясно, действительно ли такая возможность имеется.

Таким образом, обертки представляют собой простой и эффективный способ построения новых конфигураций из старых путем добавления новых линий (хотя бы на уровне карт метро, без требования распрямляемости). Известные нам обертки связаны друг с другом проективными преобразованиями и могут быть представлены как системы касательных к кривым второго порядка. Благодаря этой связи между обертками и кривыми второго порядка сама собой напрашивается гипотеза, согласно которой других обертков нет. Гипотеза эта не доказана, но и в имеющихся результатах практических вычислений следов новых обертков не найдено.

## 7 Распрямляемость

В предыдущем разделе мы начали разговор о распрямляемости карт метро и даже доказали распрямляемость одного бесконечного класса конфигураций. В продолжение покажем, что существуют такие карты метро, которые распрямить нельзя.

### 7.1 Существование нераспрямляемых конфигураций

Чтобы показать существование нераспрямляемых конфигураций, достаточно привести подходящий пример. Полный перебор среди конфигураций из 7 (и меньшего количества) прямых показал, что все они распрямляются. Кандидаты в нераспрямляемые конфигурации появляются, начиная с 8 прямых. Одна из таких конфигураций приведена на рис. 26.

Причина нераспрямляемости этой конфигурации состоит в том, что вдоль ломаных линий расположены маленькие области, которые при выпрямлении схлопываются в точки. Например, вдоль одной из линий расположены треугольники 3, 5 и 6. Треугольники 3 и 6 располагаются с одной стороны, а треугольник 5 — с другой. Из-за того, что рядом с каждой линией есть три подобных области, все линии не могут быть одновременно выпрямлены.

Перейдем теперь к строгому доказательству. Через  $p_i$  будем обозначать некоторые точки внутри (или на границе) областей  $i$ , а через  $l_{ij}$  — прямые, проходящие рядом с областями  $i$  и  $j$ . Для удобства выполним такое аффинное преобразование, чтобы прямые  $l_{37}$  и  $l_{31}$  совпали с осями координат, а прямая  $l_{26}$  — с прямой  $x+y=1$  (рис. 27). К этим трем прямым мы будем по одной добавлять остальные прямые, учитывая «устройство» конфигурации. Добавление последней прямой окажется невозможным. Тем самым мы докажем нераспрямляемость рассматриваемой конфигурации.

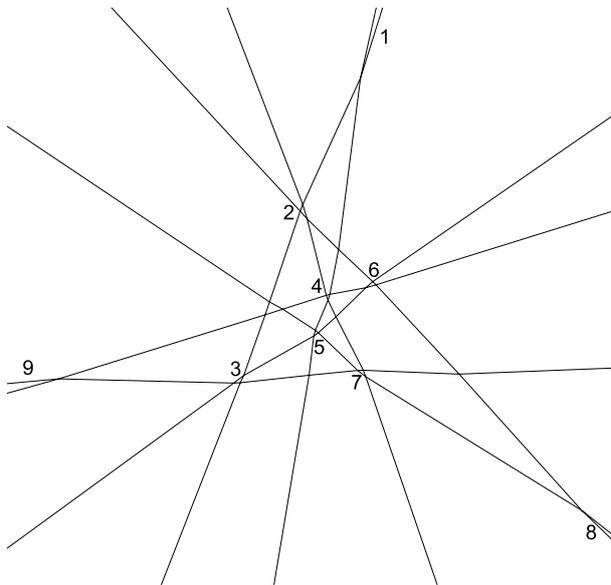


Рис. 26. Пример нераспрямляемой конфигурации из 8 линий.

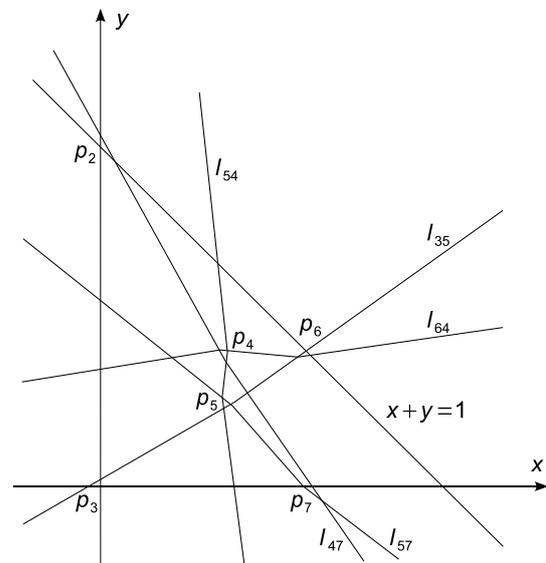


Рис. 27. Система координат и обозначения

Зафиксируем координаты  $(x_5, y_5)$  точки  $p_5$ , расположенной внутри треугольника 5. Этот треугольник образован прямыми  $l_{35}$ ,  $l_{54}$  и  $l_{57}$ . Через  $x_5$  и  $y_5$  мы будем выражать ограничения на координаты остальных точек.

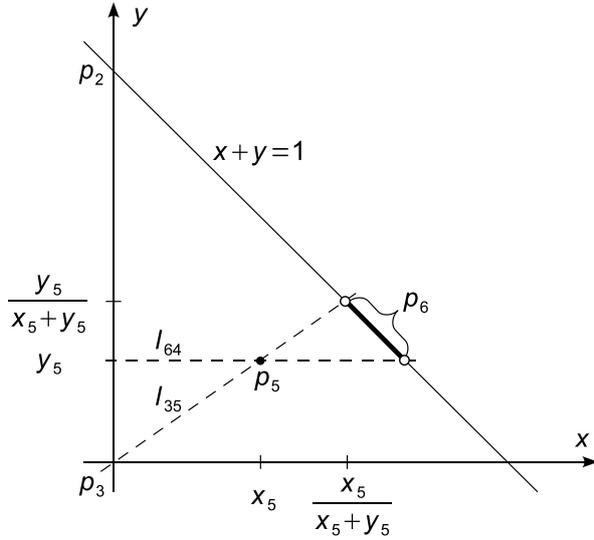


Рис. 28. Возможные положения точки  $p_6$

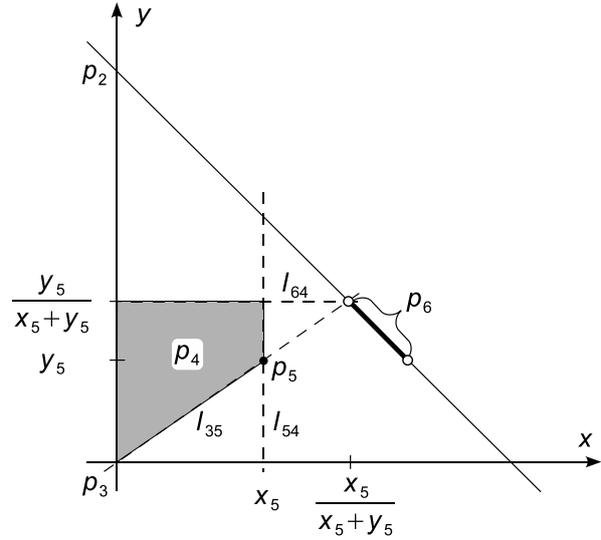


Рис. 29. Возможные положения точки  $p_4$

Рассмотрим треугольник под номером 6. Одна из его сторон лежит на прямой  $x + y = 1$ . Обозначим через  $p_6$  произвольную точку на этой стороне и ограничим ее возможные положения. Первое ограничение следует из того, что точка  $p_6$  находится ниже прямой  $l_{35}$ . Прямая  $l_{35}$  проходит выше некоторой внутренней точки  $p_3$  треугольника 3 и ниже точки  $p_5$ .

Найдем координаты  $(x, y)$  точки пересечения предельного положения прямой  $l_{35}$ , когда треугольники 3 и 5 вырождены в точки, и прямой  $x + y = 1$ . В пределе  $l_{35}$  проходит через точки  $(x_5, y_5)$  и  $(x, y)$ , а также через начало координат, поэтому  $x/y = x_5/y_5$ . Система

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ \frac{x}{y} = \frac{x_5}{y_5} \end{cases}$$

имеет следующее решение:

$$x = \frac{x_5}{x_5 + y_5}, \quad y = \frac{y_5}{x_5 + y_5}.$$

Второе ограничение определяется предельным положением прямой  $l_{64}$ , так как точка  $p_6$  должна находиться выше этой прямой.  $l_{64}$  проходит над точкой  $p_5$  и в тоже время пересекает ось абсцисс левее  $p_3$ . Предельное положение  $l_{64}$  есть прямая  $y = y_5$ .

Таким образом, точка  $p_6$  может располагаться внутри отрезка, соединяющего точки  $(x_5/(x_5 + y_5), y_5/(x_5 + y_5))$  и  $(1 - y_5, y_5)$  (этот отрезок изображен на рис. 28 жирной линией). Поскольку перенумерованные области всё-таки должны существовать и иметь ненулевые размеры,  $p_6$  не может совпадать с началом или концом отрезка.

Ограничим теперь возможные положения точки  $p_4$ . Она лежит левее прямой  $l_{54}$ , ниже прямой  $l_{64}$ , выше прямой  $l_{35}$  и правее оси ординат. Прямая  $l_{54}$  должна проходить левее точки  $p_5$  и пересекать ось ординат выше произвольной точки  $p_2$  внутри треугольника 2. Ее предельное положение — прямая  $x = x_5$ . Предельное положение прямой  $l_{35}$  уже было рассмотрено выше. Так как  $l_{64}$  проходит выше ограничиваемой области и ниже точки  $p_6$ , то ее предельное положение есть  $y = y_5/(x_5 + y_5)$ . Следовательно, точка  $p_4$  принадлежит трапеции, закрашенной на рис. 29. Как и  $p_6$ ,  $p_4$  не может располагаться на границе трапеции.

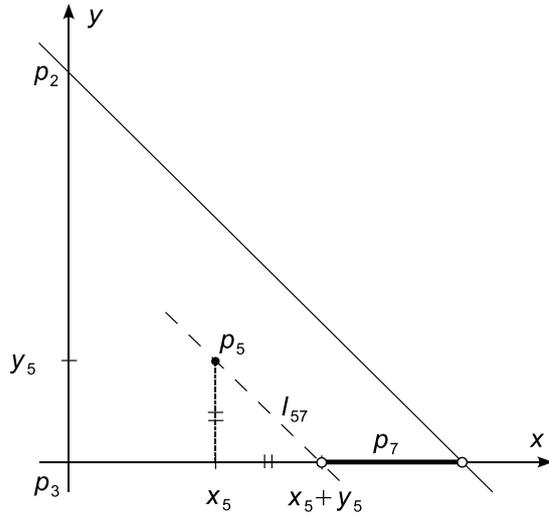


Рис. 30. Добавление прямой  $l_{57}$

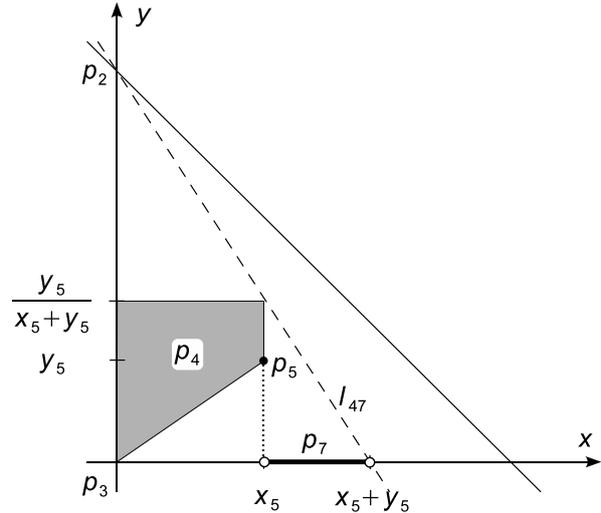


Рис. 31. Добавление прямой  $l_{47}$

Нам осталось провести еще две прямые,  $l_{57}$  и  $l_{47}$ . Вместе с осью абсцисс они образуют треугольник 7. Пусть точка  $p_7$  лежит на оси абсцисс между точками пересечения с прямыми  $l_{57}$  и  $l_{47}$ . Эти прямые ограничивают возможные положения точки  $p_7$ . Найдем эти ограничения.

Прямая  $l_{57}$  должна проходить выше точки  $p_5$  и пересекать прямую  $x + y = 1$  в нижней полуплоскости. Треугольник с вершиной в точке  $p_5$ , образованный предельным положением прямой  $l_{57}$  и ее проекцией на ось абсцисс — прямоугольный и равнобедренный (рис. 30). Его катеты имеют длину  $y_5$ , откуда следует ограничение снизу на абсциссу точки  $p_7$ :

$$x_7 > x_5 + y_5. \quad (33)$$

Прямая  $l_{47}$  проходит правее точки  $p_2$ , ниже  $p_4$  (пересекает закрашенную трапецию) и выше  $p_5$ . Из подобия треугольников (рис. 31) легко видеть, что ограничение сверху на абсциссу точки  $p_7$  дается условием:

$$\frac{x_7}{1} < \frac{x_5}{1 - y_5/(x_5 + y_5)}.$$

После преобразования получаем

$$x_7 < x_5 + y_5,$$

что не согласуется с ограничением снизу (33) ни при каких допустимых  $x_5$  и  $y_5$ .

Таким образом, мы не можем завершить построение конфигурации, следовательно, она нераспрямляема.

## 7.2 Некоторые замечания о проблеме распрямляемости

Общего подхода к проблеме распрямляемости не существует. Во-первых, мы убедились, что, с одной стороны, существуют нераспрямляемые конфигурации, а с другой — бесконечное количество распрямляемых конфигураций. Во-вторых, с алгебраической точки зрения вопрос о распрямляемости конфигураций в общем случае сводится к вопросу о существовании решения системы нелинейных неравенств, а общих методов решения такой задачи не существует.

Самый простой путь — распрямлять конфигурации с помощью компьютерных вычислений. Конечно, чем больше  $n$ , тем сложнее распрямить конфигурацию. Так, мы распрямили некоторые карты метро вплоть до 24 линий. В вопросе распрямляемости еще раз проявляются замечательные свойства оберток — такие конфигурации хорошо распрямляются текущим алгоритмом. Мы распрямили конфигурации из 33 (рис. 50) и 65 линий.

Рассмотренная выше нераспрямляемая конфигурация из 8 линий далеко не оптимальна. Однако мы обнаружили кандидаты в нераспрямляемые конфигурации и среди оптимальных конфигураций. На рис. 32 приведен пример такой конфигурации из 21 линии. Вероятно, для этой конфигурации тоже существует доказательство нераспрямляемости, однако оно должно быть слишком громоздким.

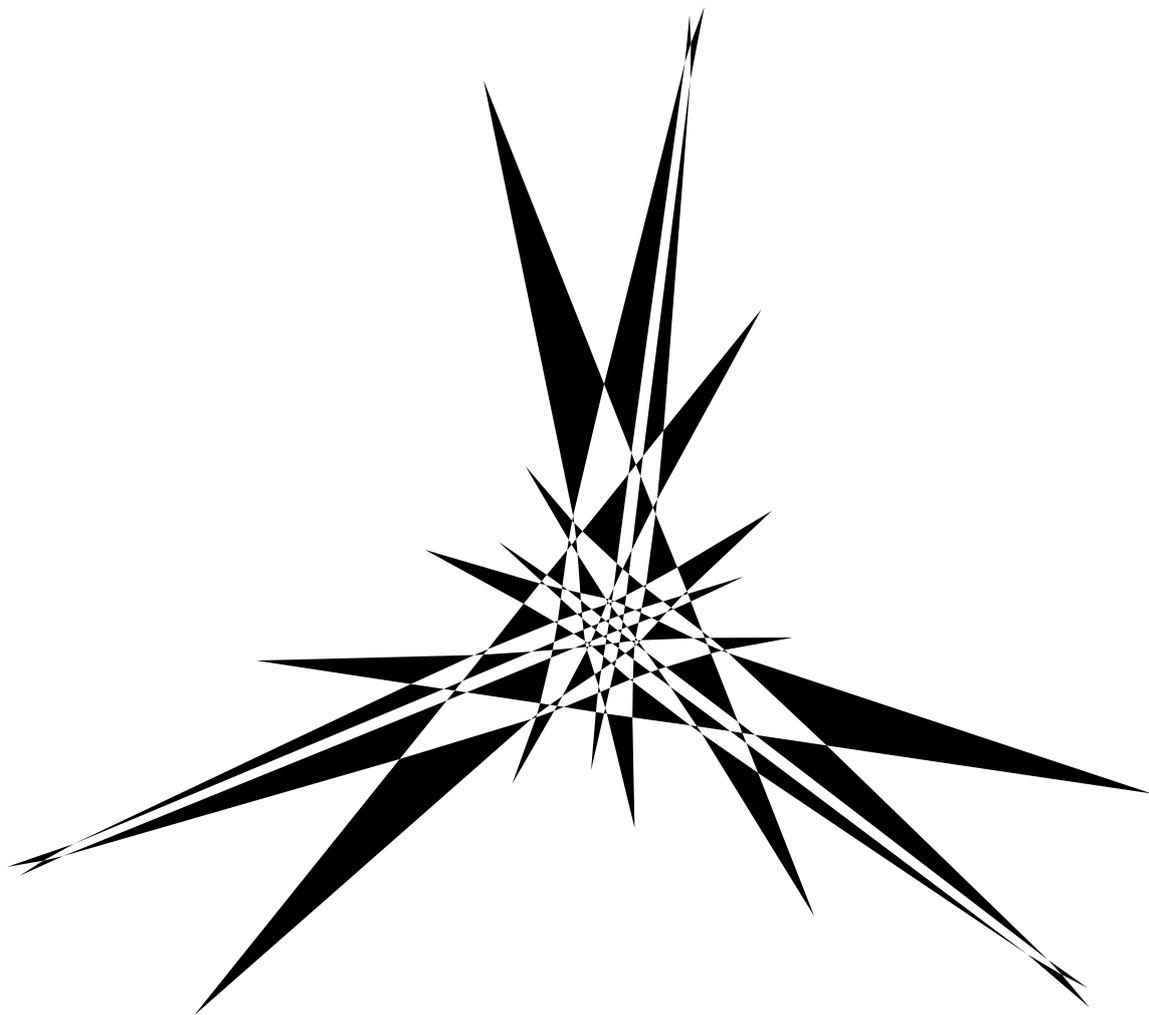


Рис. 32. Эта оптимальная конфигурация из 21 линии, вероятно, не распрямляется

О распрямляемости конфигураций при больших  $n$  можно лишь высказывать предположения. Скорее всего, при увеличении  $n$  будет расти и доля нераспрямляемых оптимальных карт метро. Возможно, при больших  $n$  почти все распрямляемые оптимальные конфигурации будут похожи на «оберточные».

## 8 Компьютерные вычисления

### 8.1 Результаты

В этом разделе обсудим некоторые результаты, полученные с помощью компьютерных программ. Основная поисковая программа осуществляет полный перебор генераторов. Ее алгоритм оптимизирован — наборы генераторов, заведомо не приводящие к оптимальным конфигурациям, не учитываются.

Для относительно небольших  $n$  удастся дождаться окончания работы программы и довести полный перебор до конца. Однако дожидаться завершения работы программы не обязательно. Результаты можно сравнивать с оценкой сверху (23) по мере их поступления. Как только оценка достигнута, вычисления можно прекращать.

В таблицах приведены следующие данные: результат расчетов ( $A$ ), оценка сверху ( $\bar{A}$ ) и количество дефектов ( $b_4$ ) в зависимости от параметров  $n$  и  $k$ . Последний столбец — отметка о достоверности результата. Результат считается достоверным, если он получен полным перебором, совпадает с оценкой сверху или получается из конфигураций с другими  $n$  и  $k$ .

$n = 2$					$n = 7$					$n = 10$				
$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$		$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$		$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$	
0	0	0	0	+	0	7	<b>7</b>	2	+	0	16	14	5	+
1	1	1	-2	+	1	8	6	3	+	1	17	15	3	+
					2	7	5	4	+	2	16	<b>16</b>	1	+
					3	6	4	5	+	3	15	15	2	+
										4	16	14	3	+
										5	15	15	1	+
$n = 3$					$n = 8$					$n = 11$				
$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$		$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$		$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$	
0	1	<b>1</b>	0	+	0	11	7	6	+	0	21	<b>19</b>	3	+
1	0	0	1	+	1	10	8	4	+	1	20	18	4	+
					2	9	9	2	+	2	19	17	5	+
					3	10	<b>10</b>	0	+	3	20	16	6	+
					4	9	9	1	+	4	19	15	7	+
										5	18	14	8	+
$n = 4$					$n = 9$					$n = 12$				
$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$		$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$		$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$	
0	1	1	2	+	0	14	<b>14</b>	0	+	0	25	19	9	+
1	2	<b>2</b>	0	+	1	13	13	1	+	1	24	20	7	+
2	1	1	1	+	2	12	12	2	+	2	23	21	5	+
					3	13	11	3	+	3	24	22	3	+
					4	12	10	4	+	4	23	<b>23</b>	1	+
										5	22	22	2	+
										6	23	21	3	+
$n = 5$					$n = 6$					$n = 12$				
$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$		$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$		$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$	
0	4	<b>4</b>	0	+	0	6	4	3	+	0	25	19	9	+
1	3	3	1	+	1	5	<b>5</b>	1	+	1	24	20	7	+
2	2	2	2	+	2	4	4	2	+	2	23	21	5	+
					3	5	<b>5</b>	0	+	3	24	22	3	+
										4	23	<b>23</b>	1	+
										5	22	22	2	+
										6	23	21	3	+

$$n = 13$$

$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$	
0	28	<b>28</b>	2	+
1	29	27	3	+
2	28	26	4	+
3	27	25	5	+
4	28	24	6	+
5	27	23	7	+
6	26	22	8	+

$$n = 17$$

$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$	
0	50	<b>50</b>	0	+
1	49	49	1	+
2	48	48	2	+
3	49	47	3	+
4	48	46	4	+
5	47	45	5	+
6	48	44	6	+
7	47	43	7	+
8	46	42	8	+

$$n = 20$$

$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$	
0	69	61	12	+
1	68	62	10	+
2	67	63	8	+
3	68	64	6	+
4	67	65	4	+
5	66	66	2	+
6	67	<b>67</b>	0	+
7	66	66	1	+
8	65	65	2	+
9	66	66	0	+
10	65	65	1	+

$$n = 14$$

$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$	
0	34	28	9	+
1	33	29	7	+
2	32	30	5	+
3	33	31	3	+
4	32	<b>32</b>	1	+
5	31	31	2	+
6	32	<b>32</b>	0	+
7	31	31	1	+

$$n = 18$$

$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$	
0	56	50	9	+
1	55	51	7	+
2	54	52	5	+
3	55	53	3	+
4	54	<b>54</b>	1	+
5	53	53	2	+
6	54	<b>54</b>	0	+
7	53	53	1	+
8	52	52	2	+
9	53	53	0	+

$$n = 21$$

$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$	
0	76	<b>76</b>	0	+
1	75	75	1	+
2	74	74	2	+
3	75	73	3	+
4	74	72	4	+
5	73	71	5	+
6	74	70	6	+
7	73	69	7	+
8	72	68	8	+
9	73	67	9	+
10	72	66	10	+

$$n = 15$$

$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$	
0	39	<b>39</b>	0	+
1	38	38	1	+
2	37	37	2	+
3	38	36	3	+
4	37	35	4	+
5	36	34	5	+
6	37	33	6	+
7	36	32	7	+

$$n = 19$$

$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$	
0	61	<b>61</b>	2	+
1	62	60	3	+
2	61	59	4	+
3	60	58	5	+
4	61	57	6	+
5	60	56	7	+
6	59	55	8	+
7	60	54	9	+
8	59	53	10	+
9	58	52	11	+

$$n = 22$$

$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$	
0	82	76	11	+
1	83	77	9	+
2	82	78	7	+
3	81	79	5	+
4	82	80	3	+
5	81	<b>81</b>	1	+
6	80	80	2	+
7	81	<b>81</b>	0	+
8	80	80	1	+
9	79	79	2	+
10	80	80	0	+
11	79	79	1	+

$$n = 16$$

$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$	
0	43	39	8	+
1	44	40	6	+
2	43	41	4	+
3	42	42	2	+
4	43	<b>43</b>	0	+
5	42	42	1	+
6	41	41	2	+
7	42	42	0	+
8	41	41	1	+

$n = 23$					$n = 26$					$n = 28$				
$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$		$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$		$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$	
0	91	<b>91</b>	0	+	0	116	106	15	+	0	133	125	14	+
1	90	90	1	+	1	115	107	13	+	1	134	126	12	+
2	89	89	2	+	2	114	108	11	+	2	133	125	13	
3	90	88	3	+	3	115	109	9	+	3	132	126	11	
4	89	87	4	+	4	114	110	7	+	4	133	127	9	
5	88	86	5	+	5	113	111	5	+	5	132	128	7	
6	89	85	6	+	6	114	112	3	+	6	131	129	5	
7	88	84	7	+	7	113	<b>113</b>	1	+	7	132	130	3	
8	87	83	8	+	8	112	112	2	+	8	131	131	1	+
9	88	82	9	+	9	113	<b>113</b>	0	+	9	130	130	2	+
10	87	81	10	+	10	112	112	1	+	10	131	129	3	
11	86	80	11	+	11	111	111	2	+	11	130	130	1	+
					12	112	112	0	+	12	129	129	2	+
					13	111	111	1	+	13	130	130	0	+
										14	129	129	1	+

$n = 24$				
$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$	
0	99	91	12	+
1	98	92	10	+
2	97	93	8	+
3	98	94	6	+
4	97	95	4	+
5	96	96	2	+
6	97	<b>97</b>	0	+
7	96	96	1	+
8	95	95	2	+
9	96	96	0	+
10	95	95	1	+
11	94	94	2	+
12	95	95	0	+

$n = 25$					$n = 27$					$n = 29$				
$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$		$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$		$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$	
0	106	<b>106</b>	2	+	0	125	<b>125</b>	0	+	0	144	<b>144</b>	0	+
1	107	105	3	+	1	124	124	1	+	1	143	143	1	+
2	106	104	4	+	2	123	123	2	+	2	142	142	2	+
3	105	103	5	+	3	124	122	3	+	3	143	141	3	+
4	106	102	6	+	4	123	121	4	+	4	142	140	4	+
5	105	101	7	+	5	122	120	5	+	5	141	139	5	+
6	104	100	8	+	6	123	119	6	+	6	142	138	6	+
7	105	99	9	+	7	122	118	7	+	7	141	137	7	+
8	104	98	10	+	8	121	117	8	+	8	140	136	8	+
9	103	97	11	+	9	122	116	9	+	9	141	135	9	+
10	104	96	12	+	10	121	115	10	+	10	140	134	10	+
11	103	95	13	+	11	120	114	11	+	11	139	133	11	+
12	102	94	14	+	12	121	113	12	+	12	140	132	12	+
					13	120	112	13	+	13	139	131	13	+
										14	138	130	14	+

$n = 30$					$n = 32$					$n = 34$				
$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$		$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$		$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$	
0	154	144	15	+	0	175	163	18	+	0	196	186	17	+
1	153	145	13	+	1	174	164	16	+	1	197	187	15	+
2	152	144	14		2	173	165	14	+	2	196	186	16	
3	153	145	12		3	174	166	12	+	3	195	187	14	
4	152	146	10		4	173	167	10	+	4	196	188	12	
5	151	147	8		5	172	168	8	+	5	195	189	10	
6	152	148	6		6	173	169	6	+	6	194	190	8	
7	151	149	4		7	172	170	4	+	7	195	188	9	
8	150	148	5		8	171	169	5		8	194	190	7	
9	151	149	3		9	172	170	3		9	193	189	8	
10	150	148	4		10	171	169	4		10	194	190	6	
11	149	149	2	+	11	170	170	2	+	11	193	191	4	
12	150	148	3		12	171	169	3		12	192	190	5	
13	149	147	4		13	170	168	4		13	193	191	3	
14	148	148	2	+	14	169	169	2	+	14	192	190	4	
15	149	149	0	+	15	170	170	0	+	15	191	191	2	+
					16	169	169	1	+	16	192	192	0	+
										17	191	191	1	+

$n = 31$					$n = 33$					$n = 35$				
$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$		$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$		$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$	
0	163	<b>163</b>	2	+	0	186	<b>186</b>	0	+	0	209	<b>209</b>	0	+
1	164	162	3	+	1	185	185	1	+	1	208	208	1	+
2	163	161	4	+	2	184	184	2	+	2	207	207	2	+
3	162	160	5	+	3	185	183	3	+	3	208	206	3	+
4	163	159	6	+	4	184	182	4	+	4	207	205	4	+
5	162	158	7	+	5	183	181	5	+	5	206	204	5	+
6	161	157	8	+	6	184	180	6	+	6	207	203	6	+
7	162	156	9	+	7	183	179	7	+	7	206	202	7	+
8	161	155	10	+	8	182	178	8	+	8	205	201	8	+
9	160	154	11	+	9	183	177	9	+	9	206	200	9	+
10	161	153	12	+	10	182	176	10	+	10	205	199	10	+
11	160	152	13	+	11	181	175	11	+	11	204	198	11	+
12	159	151	14	+	12	182	174	12	+	12	205	197	12	+
13	160	150	15	+	13	181	173	13	+	13	204	196	13	+
14	159	149	16	+	14	180	172	14	+	14	203	195	14	+
15	158	148	17	+	15	181	171	15	+	15	204	194	15	+
					16	180	170	16	+	16	203	193	16	+
										17	202	192	17	+

$n = 37$					$n = 39$					$n = 41$				
$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$		$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$		$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$	
0	232	<b>232</b>	2	+	0	259	<b>259</b>	0	+	0	286	<b>286</b>	0	+
1	233	231	3	+	1	258	258	1	+	1	285	285	1	+
2	232	230	4	+	2	257	257	2	+	2	284	284	2	+
3	231	229	5	+	3	258	256	3	+	3	285	283	3	+
4	232	228	6	+	4	257	255	4	+	4	284	282	4	+
5	231	227	7	+	5	256	254	5	+	5	283	281	5	+
6	230	226	8	+	6	257	253	6	+	6	284	280	6	+
7	231	225	9	+	7	256	252	7	+	7	283	279	7	+
8	230	224	10	+	8	255	251	8	+	8	282	278	8	+
9	229	223	11	+	9	256	250	9	+	9	283	277	9	+
10	230	222	12	+	10	255	249	10	+	10	282	276	10	+
11	229	221	13	+	11	254	248	11	+	11	281	275	11	+
12	228	220	14	+	12	255	247	12	+	12	282	274	12	+
13	229	219	15	+	13	254	246	13	+	13	281	273	13	+
14	228	218	16	+	14	253	245	14	+	14	280	272	14	+
15	227	217	17	+	15	254	244	15	+	15	281	271	15	+
16	228	216	18	+	16	253	243	16	+	16	280	270	16	+
17	227	215	19	+	17	252	242	17	+	17	279	269	17	+
18	226	214	20	+	18	253	241	18	+	18	280	268	18	+
					19	252	240	19	+	19	279	267	19	+
										20	278	266	20	+

$n = 38$					$n = 40$				
$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$		$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$	
0	246	232	21	+	0	271	259	23	+
1	245	233	19	+	1	272	260	21	+
2	244	234	17	+	2	271	259	19	
3	245	235	15	+	3	270	260	17	
4	244	234	16		4	271	261	15	
5	243	235	14		5	270	262	13	
6	244	236	12		6	269	261	14	
7	243	237	10		7	270	262	12	
8	242	236	11		8	269	261	13	
9	243	237	9		9	268	262	11	
10	242	236	10		10	269	263	9	
11	241	237	8		11	268	262	10	
12	242	236	9		12	267			
13	241	237	7		13	268			
14	240				14	267			
15	241				15	266			
16	240				16	267			
17	239	239	2	+	17	266			
18	240	240	0	+	18	265	265	2	+
19	239	239	1	+	19	266	266	0	+
					20	265	265	1	+

$$n = 43$$

$k$	$\bar{A}$	$A$	$b_4$	
0	313	<b>313</b>	2	+
1	314	312	3	+
2	313	311	4	+
3	312	310	5	+
4	313	309	6	+
5	312	308	7	+
6	311	307	8	+
7	312	306	9	+
8	311	305	10	+
9	310	304	11	+
10	311	303	12	+
11	310	302	13	+
12	309	301	14	+
13	310	300	15	+
14	309	299	16	+
15	308	298	17	+
16	309	297	18	+
17	308	296	19	+
18	307	295	20	+
19	308	294	21	+
20	307	293	22	+
21	306	292	23	+

## 8.2 Анализ результатов. Комбинированная оценка

Проведем анализ результатов вычислений.  $A$  и  $\bar{A}$  действительно близки. Конечно, хотелось бы получить окончательный ответ, похожий на формулу (23), который бы совпадал с результатами вычислений. Однако из таблицы хорошо видно, что формула (23) не является окончательным ответом.

Неравенство (23) — не единственное ограничение на искомую функцию. Теоремы 7...10 дают дополнительные ограничения, учет которых позволяет значительно улучшить согласие оценок и результатов<sup>10</sup>.

Рассмотрим, например, случай  $n = 7$ . Результаты согласуются с формулой (23) при единственном значении  $k = 0$ . При  $k = 1$  формула предсказывает увеличение разности на 1, а на самом деле разность уменьшается на 1. Но согласно теореме 8, а именно из равенства (15), так и должно быть. Убывание разности на 1 с ростом  $k$  прослеживается для любого нечетного  $n$ .

Случай четных  $n$  «дорабатывается» аналогично. Возьмем, например, следующую строчку:  $A(8, 0) = 7$ ,  $\bar{A}(8, 0) = 11$ . По теореме 9 имеем  $A(8, 0) = A(7, 0)$ , и это значение, очевидно, не может превышать оценку сверху  $\bar{A}(7, 0) = 7$ . Для других  $k$  мы пользуемся дискретной непрерывностью (теорема 7) и дополняем существующую оценку

$$A(8, k) \leq \bar{A}(8, k)$$

новой оценкой

$$A(8, k) \leq \bar{A}(7, 0) + k.$$

Результаты для  $n = 8$  полностью объясняются комбинацией таких оценок. Обобщение на случай произвольного  $n$  тривиально.

Комбинация оценки сверху и теорем 7...10 гораздо лучше объясняет имеющиеся результаты. Единственным отклонением от комбинированной оценки является случай  $n = 11$  (и соседние 10 и 12, что частично можно объяснить теоремами 7...10).  $A(11, 0) = 19$ , и это значение меньше оценки  $\bar{A}(11, 0) = 21$ . Согласно (24), конфигурации с такими параметрами обладают тремя дефектами. Конечно, можно пытаться объяснить данное расхождение за счет изъяна в программе. Однако этот случай и связанные с ним трехдефектные конфигурации  $A(10, 4) = 14$  и  $A(12, 3) = 19$  подробно и многократно исследовались, ошибок в алгоритмах не найдено<sup>11</sup>.

Следует отметить, что в таблицах не всегда приведены те ответы, которые выдает программа. Часть ячеек заполнена данными, следующими из комбинированной оценки. Например, в случае нечетного  $n$  достаточно получить совпадение с улучшенной оценкой для максимального  $k$  (именно для максимальных  $k$  программа выдает

---

<sup>10</sup> Последовательность изложения в этой статье отличается от последовательности исследований. Сначала нами была выведена формула (23), затем получена сводная таблица результатов достаточного объема, на основе их анализа был выдвинут и доказан ряд гипотез, сформулированных в теоремах 7...10.

<sup>11</sup> Относительно небольшое количество прямых ( $n = 11$ ) позволяет провести полный перебор среди конфигураций с тремя дефектами. Всего было найдено 115 топологически различных карт метро для случая  $k = 0$ .

Если бы существовала бездефектная конфигурация  $A(10, 4) = 16$ , то из нее легко можно было бы получить бездефектную  $A(11, 0) = 21$ . Однако из  $A(10, 4) = 16$  легко получить также и  $A(10, 5) = 15$ , у которой есть один *дефект между парой параллельных*. Программа же выдала только одну карту метро для  $A(10, 5) = 15$  (остальные были топологически эквивалентны ей), соответствующая конфигурация приведена на рис. 34. Видно, что единственный дефект не лежит между парой параллельных прямых.

ответ быстрее всего). Тогда по теореме 8 можно сразу же заполнить ячейки, отвечающие всем значениям  $k$ . Ясно, что все эти данные можно считать надежными. Они помечены знаком «+» в последней колонке. Другой пример — для нечетного  $n$  программа выдает результат, согласующийся с оценкой, гораздо быстрее, чем для четного. Сейчас четный случай полностью просчитан только до  $n = 26$  (при некоторых  $k$  получены результаты и для больших  $n$ ). Однако из результатов для нечетного  $n$  теоремы 9 и 10 предсказывают некоторые значения разности в промежуточных четных случаях. Поэтому, например, в таблице отмечены знаком «+» «результаты» для  $n = 40$  и  $k = 0, 1, 18, 19, 20$ , хотя программа их не выдавала.

Наибольший надежный результат выдан программой для 43 линий. Этот результат вычислений совпадает с оценкой сверху. Программа выдает правильный ответ через несколько дней после запуска на 30 процессорах.

### 8.3 Классы решений

Сама по себе ценность практических вычислений ограничена. Во-первых, каждый новый результат получать всё сложнее и сложнее. Так, организация параллельных вычислений и запуск программы на десятках процессоров, вместо одного, привели к получению оптимальных конфигураций всего лишь для случаев  $n = 39$ ,  $n = 41$  и  $n = 43$ . Во-вторых, результаты никак не гарантируют того, что, начиная с некоторого, возможно, очень большого  $n$ , настоящая разность не отклонится от оценок.

Построение бесконечных классов конфигураций через обертывание придает новый смысл поиску конфигураций на компьютере. Каждый новый результат открывает бесконечный класс решений (конечно, если он до этого не принадлежал какому-либо уже открытому классу).

Ниже в таблице приведены возможные классы решений. Классы, отмеченные знаком вопроса, на практике еще не открыты. Напротив каждого класса указано число дефектов в его конфигурациях (нулевое число дефектов опущено).

Ближайшая не найденная на практике конфигурация, которая открывает новый класс, содержит 47 линий.

Обсудим случай  $n = 11$  с точки зрения классов конфигураций. Трехдефектные конфигурации из 11 прямых порождают класс трехдефектных конфигураций. Следующими в этом классе идут конфигурации из 21 прямой. Но для  $n = 21$  существуют бездефектные конфигурации (для них разность совпадает с оценкой сверху). Этот класс, начиная с  $n = 21$ , «исправляется».

Возможно, случай  $n = 11$  — единственное отклонение оценки сверху от истинного значения разности. Или, может быть, есть и другие классы с «испорченными» начальными конфигурациями, или даже классы, в которых «испорчены» все конфигурации.

Классы конфигураций накладывают на искомую разность и оценку снизу, «прижимая» ее при некоторых  $n$  к оценке сверху. Таким образом, мы приходим к выводу, что знак неравенства в (23) можно заменить на знак равенства на некотором (бесконечном) множестве значений параметра  $n$ .

Бесконечные классы решений

	3	5	9	17	33	65	129	257	513	1025
	5									
2	7	13	25	49	97	193	385	769	1537	3073
	9									
3	11									
2	13									
	15	29	57	113	225	449	897	1793	3585	7169
	17									
2	19	37	73	145	289	577	1153	2305	4609	9217
	21	41	81	161	321	641	1281	2561	5121	10241
	23	45	89	177	353	705	1409	2817	5633	11265
2	25									
	27	53	105	209	417	833	1665	3329	6657	13313
	29									
2	31	61	121	241	481	961	1921	3841	7681	15361
	33									
	35	69	137	273	545	1089	2177	4353	8705	17409
2	37									
	39	77	153	305	609	1217	2433	4865	9729	19457
	41									
2	43	85	169	337	673	1345	2689	5377	10753	21505
	45									
?	47	93	185	369	737	1473	2945	5889	11777	23553
2	49									
?	51	101	201	401	801	1601	3201	6401	12801	25601
	53									
?	2	55	109	217	433	865	1729	3457	6913	13825
	57									
?	59	117	233	465	929	1857	3713	7425	14849	29697
2	61									
?	63	125	249	497	993	1985	3969	7937	15873	31745
	65									
?	2	67	133	265	529	1057	2113	4225	8449	16897
	69									
?	71	141	281	561	1121	2241	4481	8961	17921	35841
2	73									
?	75	149	297	593	1185	2369	4737	9473	18945	37889
	77									
?	2	79	157	313	625	1249	2497	4993	9985	19969
										39937

## А Приложение

### А.1 Примеры конфигураций

На картинках изображены некоторые конфигурации. Большинство из них — оптимальные (кроме конфигураций на рис. 34, 42).

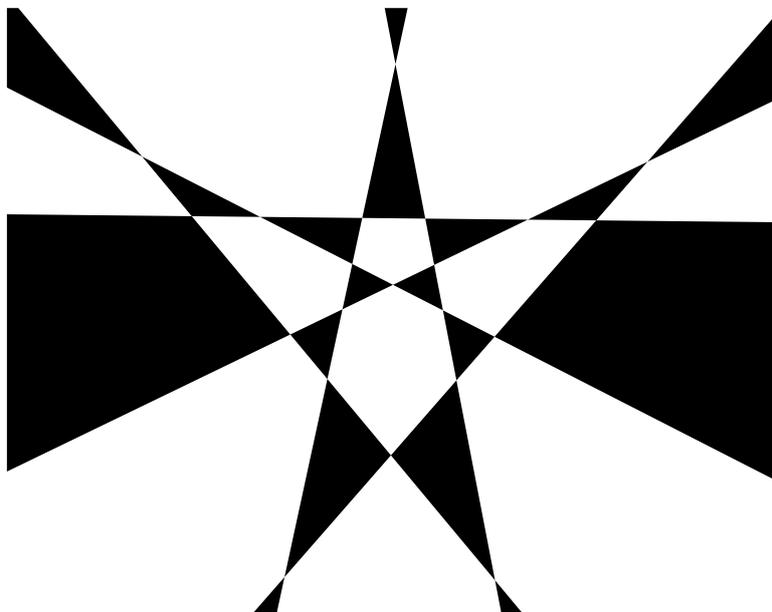


Рис. 33.  $A(7, 0) = 7$

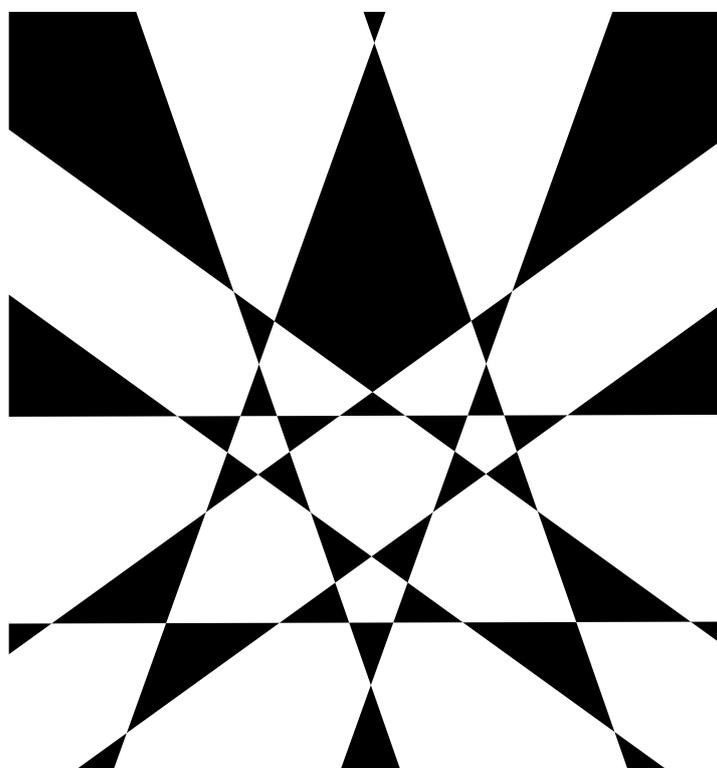


Рис. 34.  $A(10, 5) = 15$ . Конфигурация не оптимальная, но представляет интерес

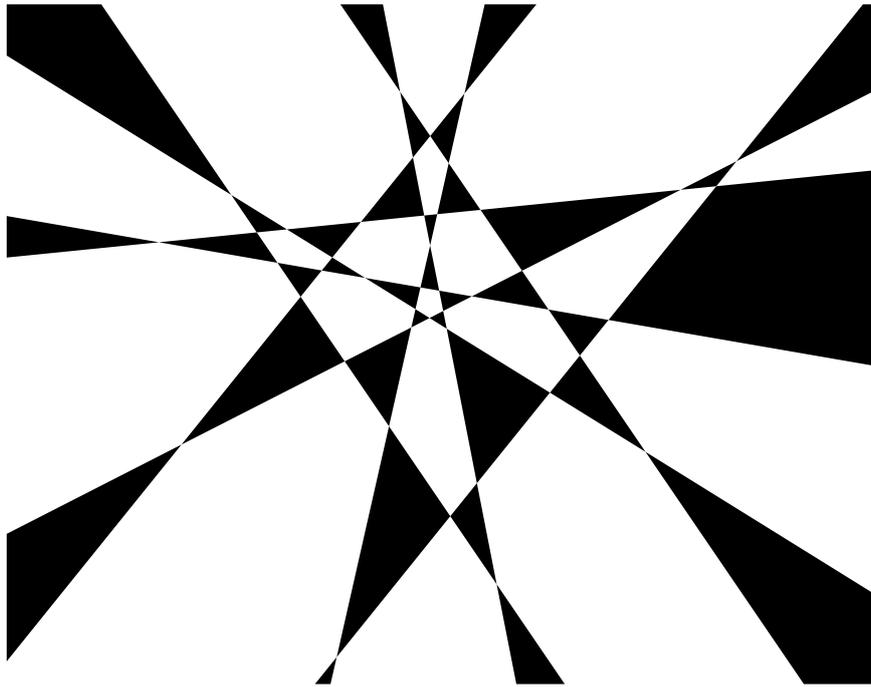


Рис. 35.  $A(10, 2) = 16$

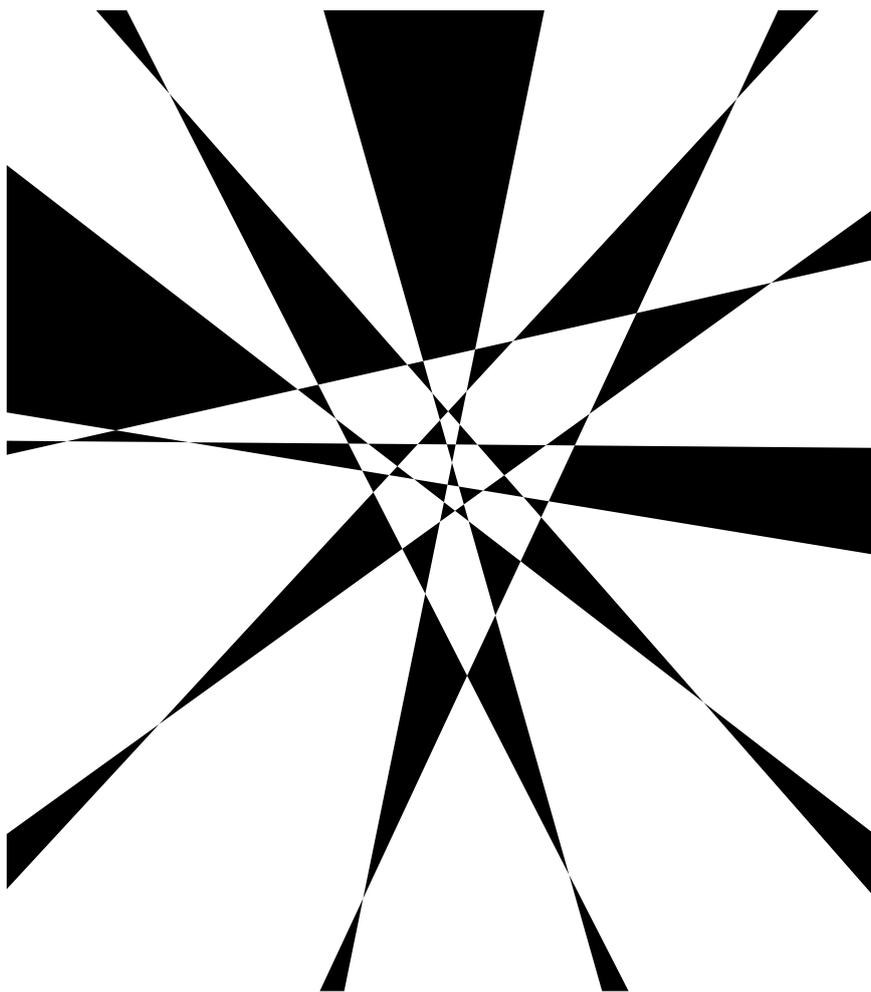


Рис. 36.  $A(11, 0) = 19$

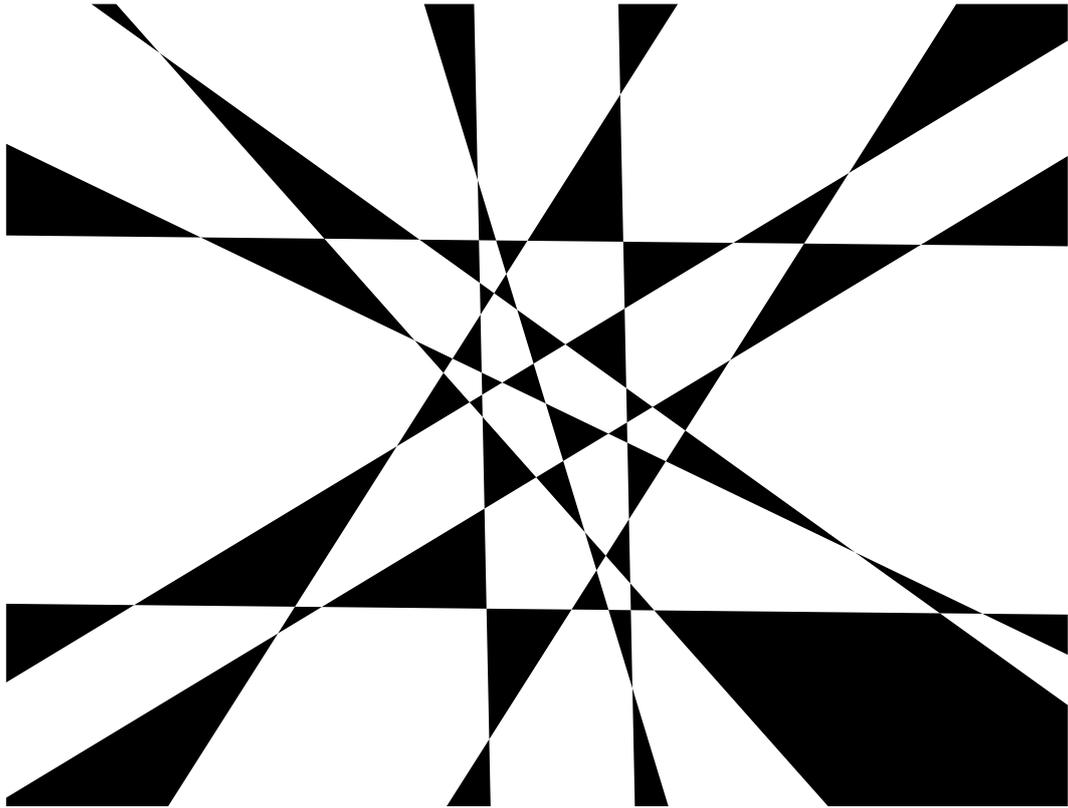


Рис. 37.  $A(12, 4) = 23$

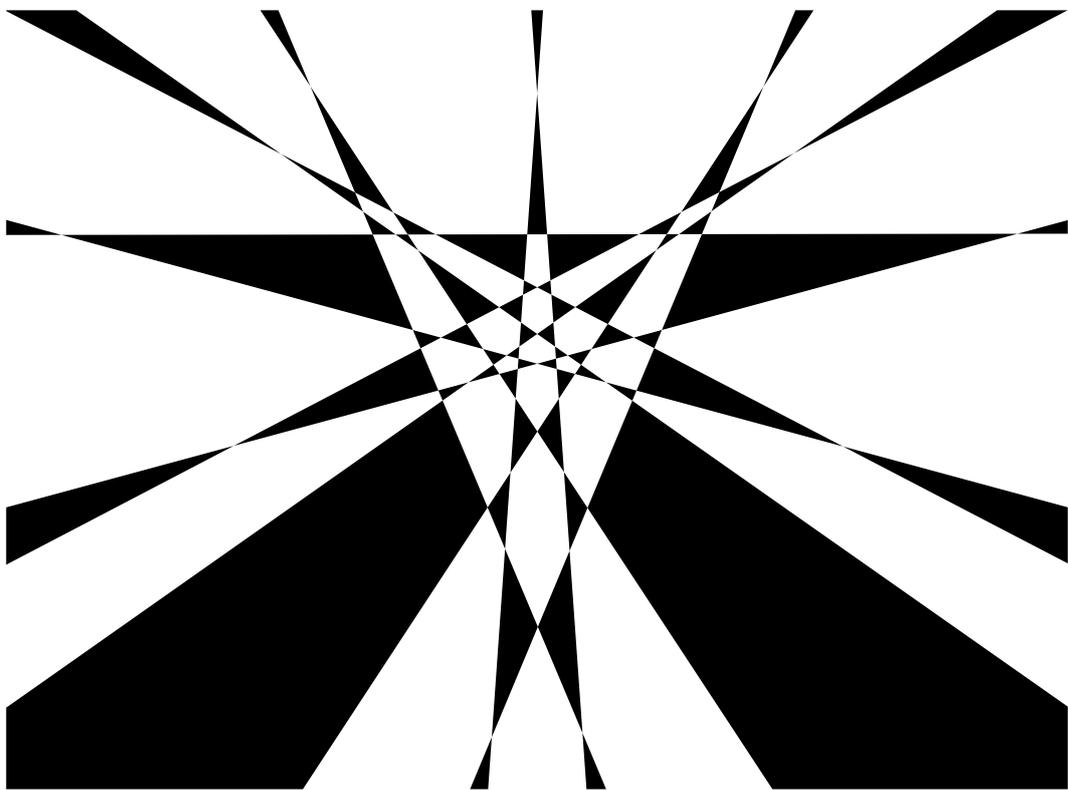


Рис. 38.  $A(13, 0) = 28$

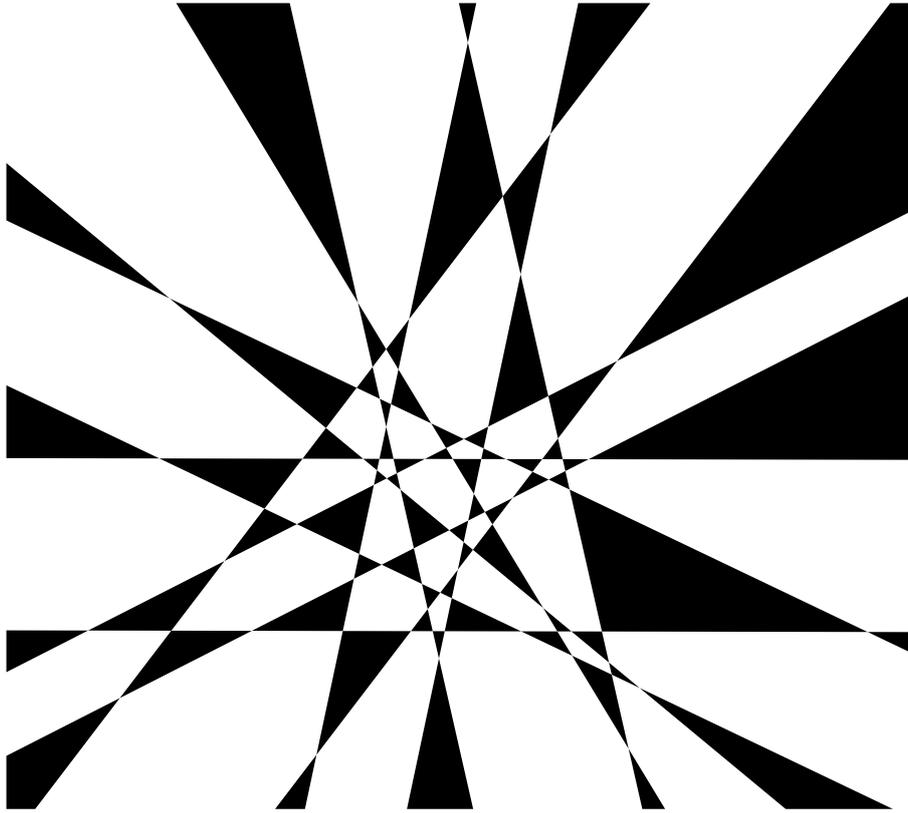


Рис. 39.  $A(14, 6) = 32$

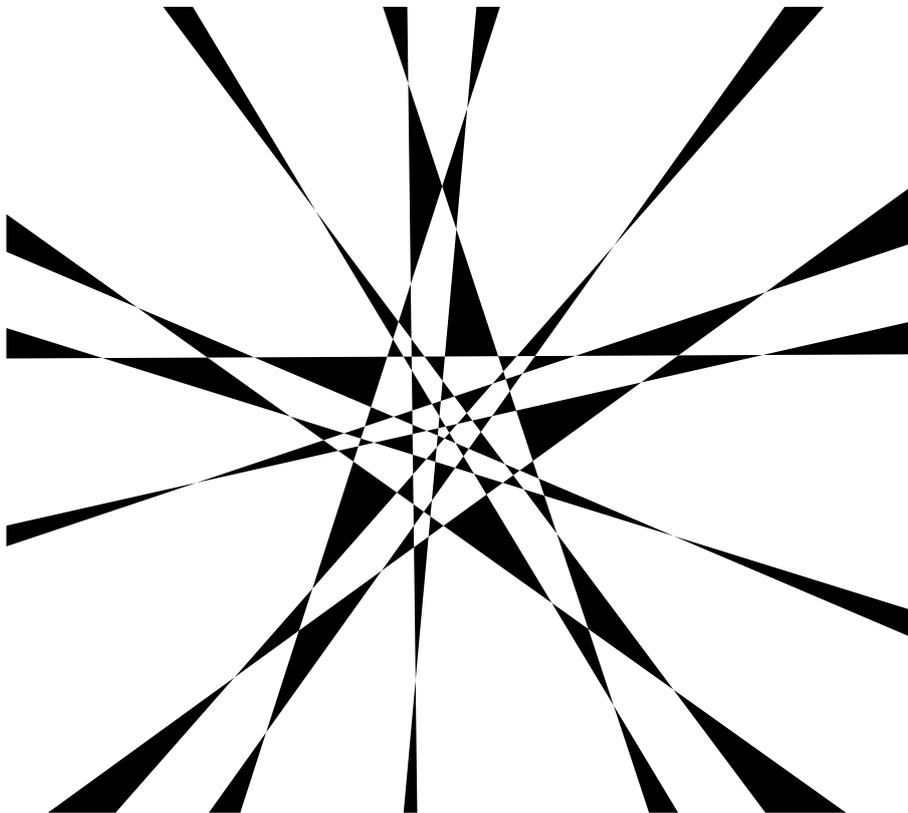


Рис. 40.  $A(15, 0) = 39$

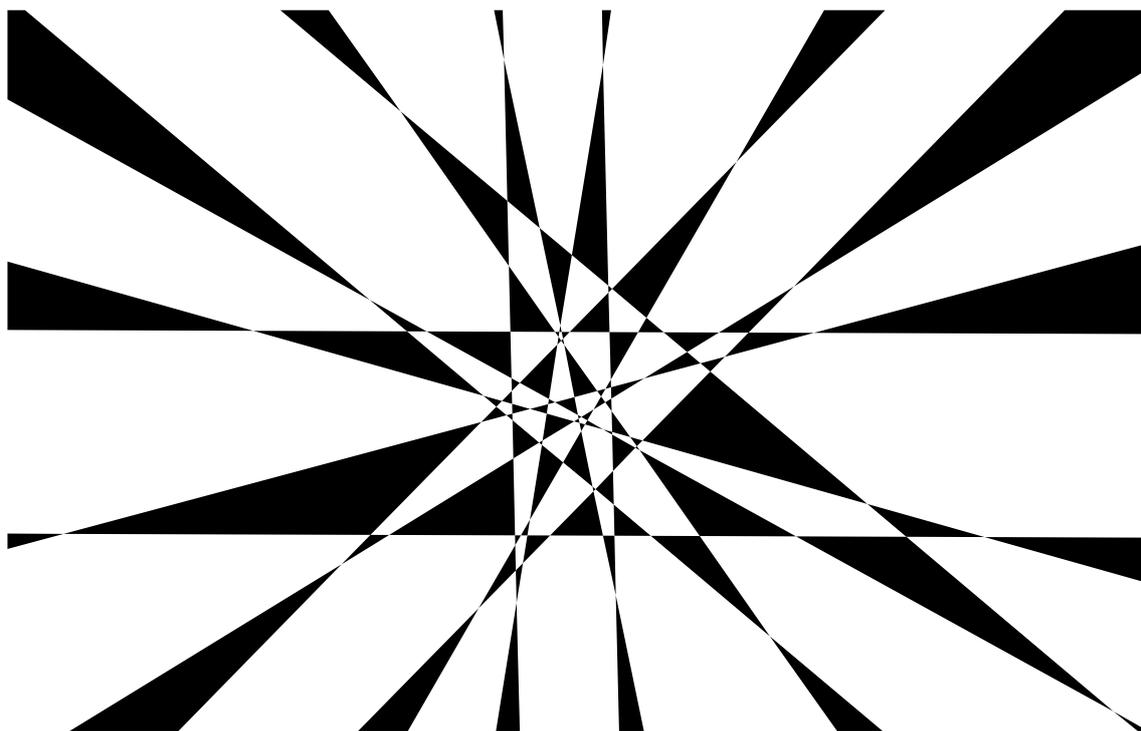


Рис. 41.  $A(16, 4) = 43$

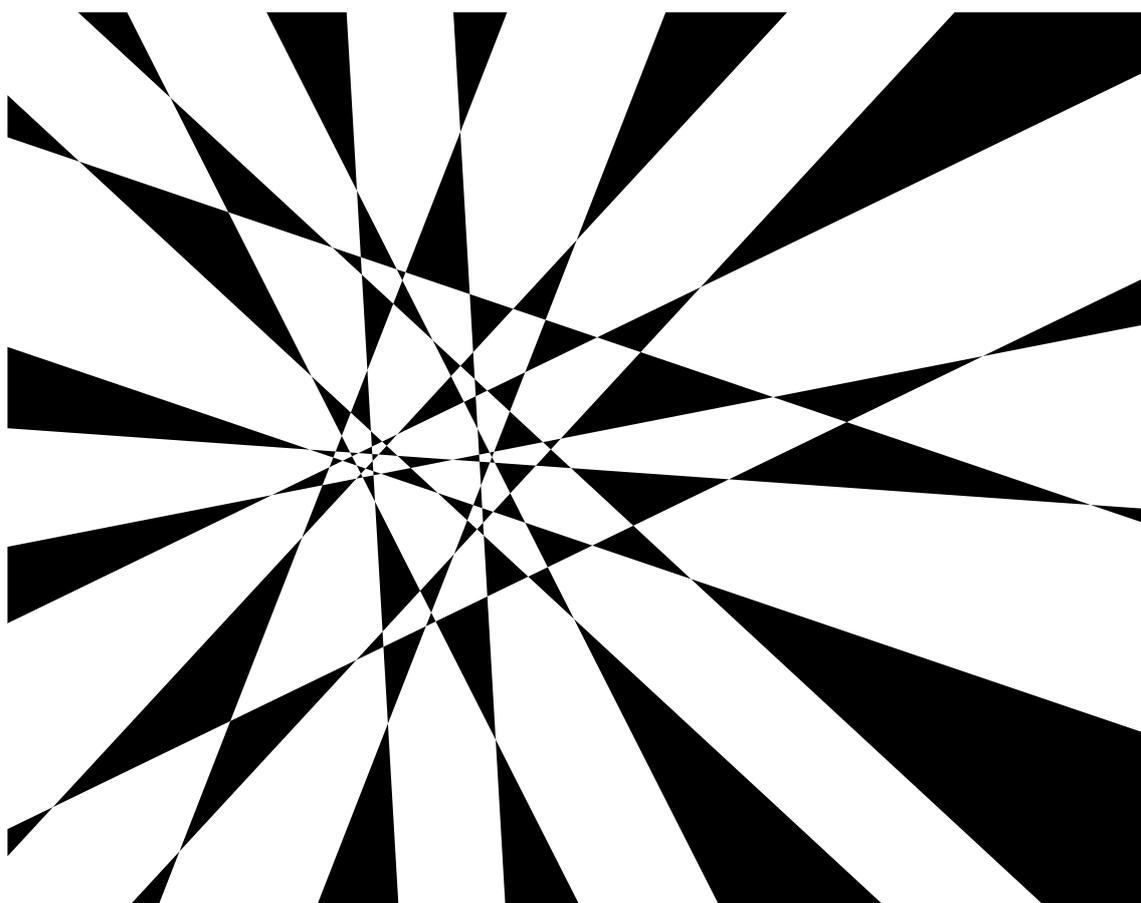


Рис. 42.  $A(16, 7) = 42$ . Конфигурация не оптимальная, но представляет интерес

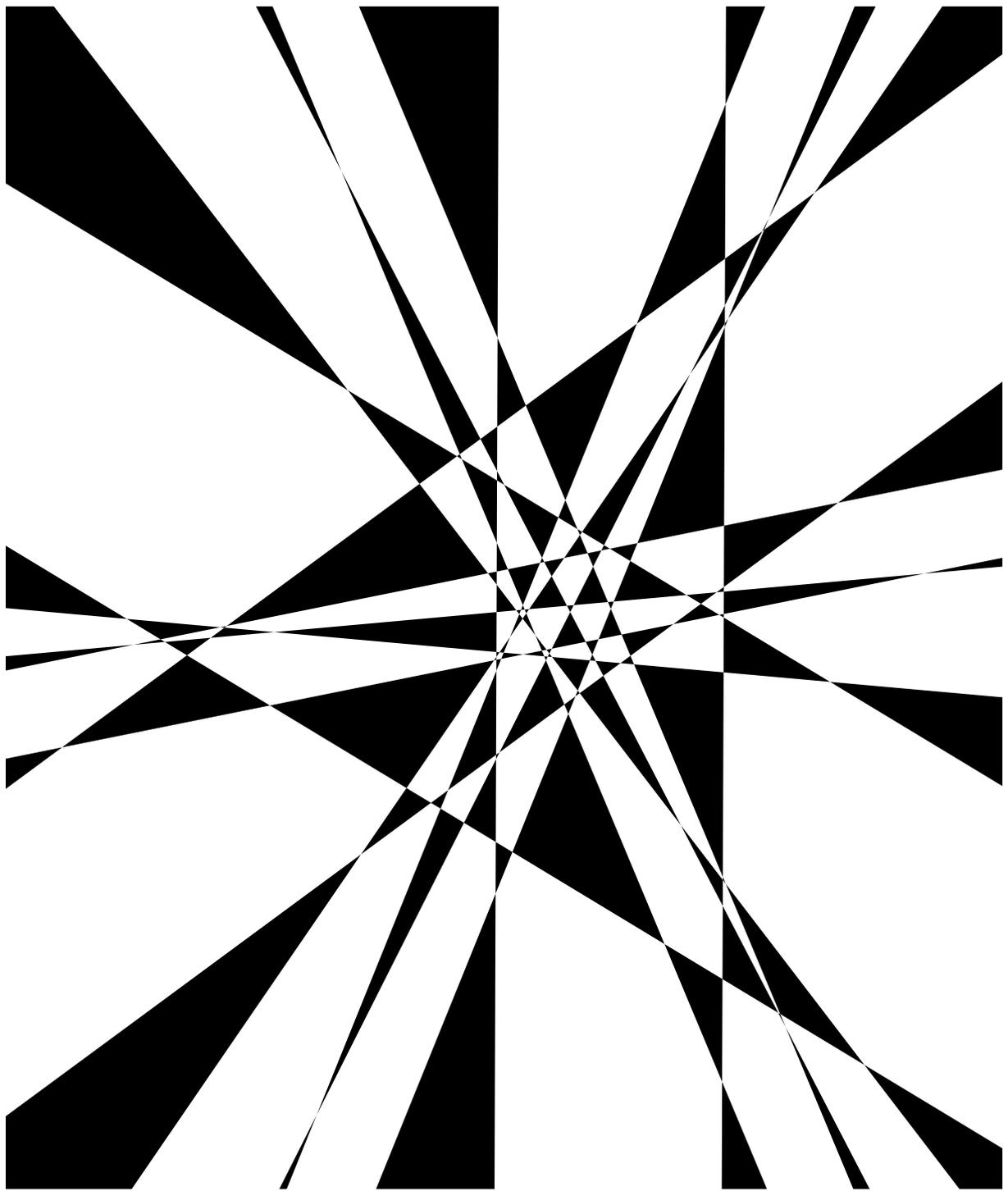


Рис. 43.  $A(18, 6) = 54$

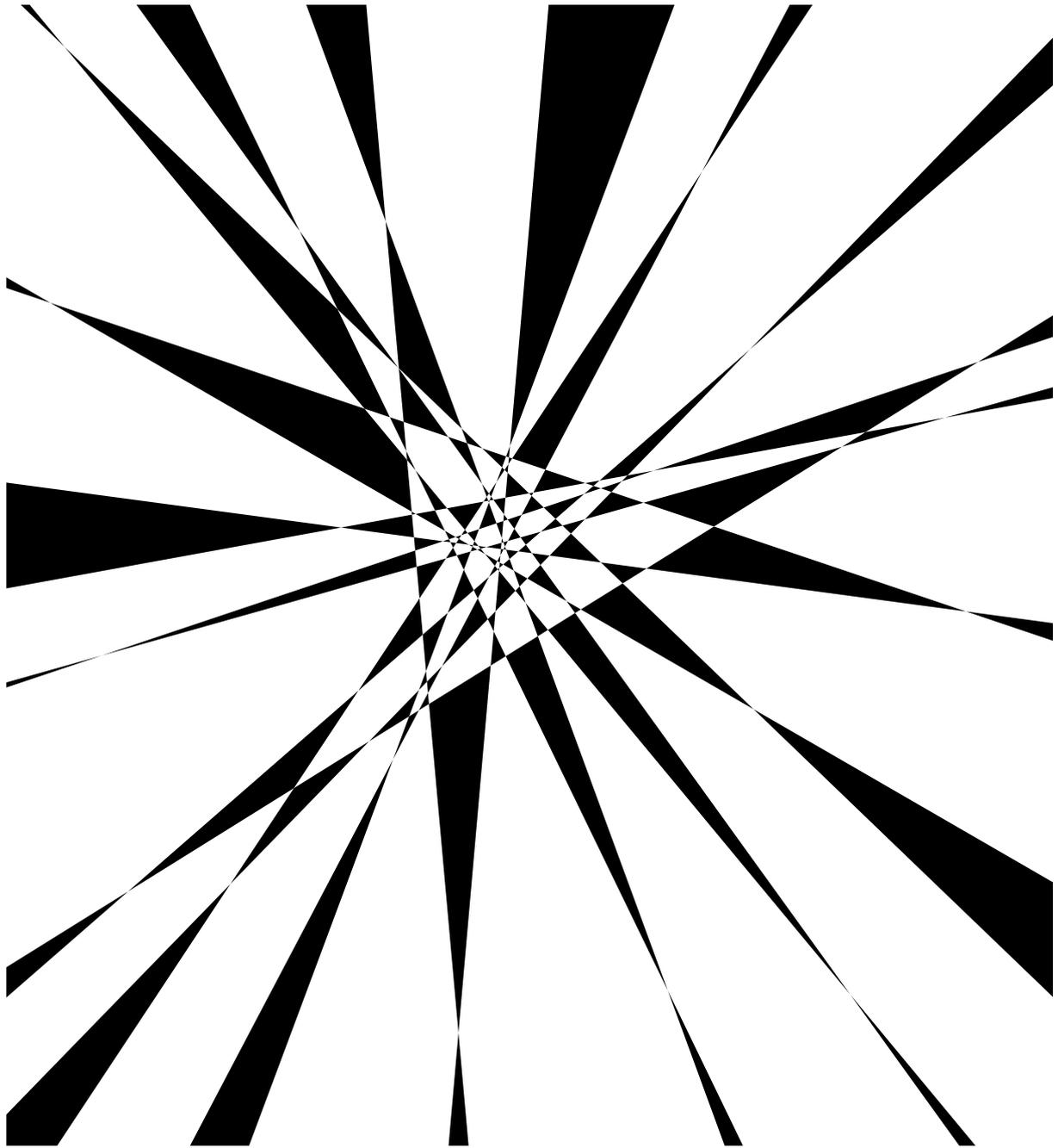


Рис. 44.  $A(19, 0) = 61$

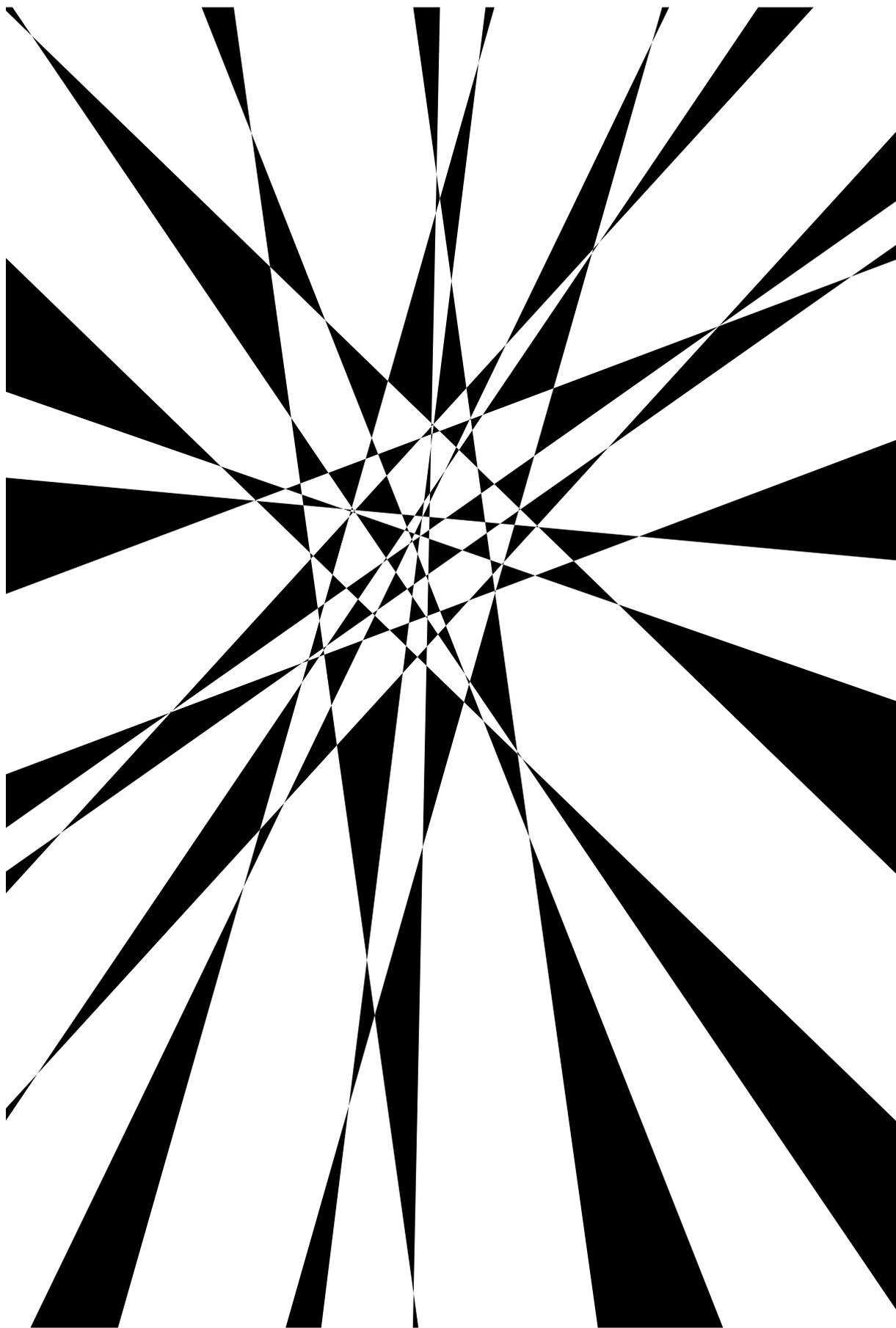


Рис. 45.  $A(20, 6) = 67$

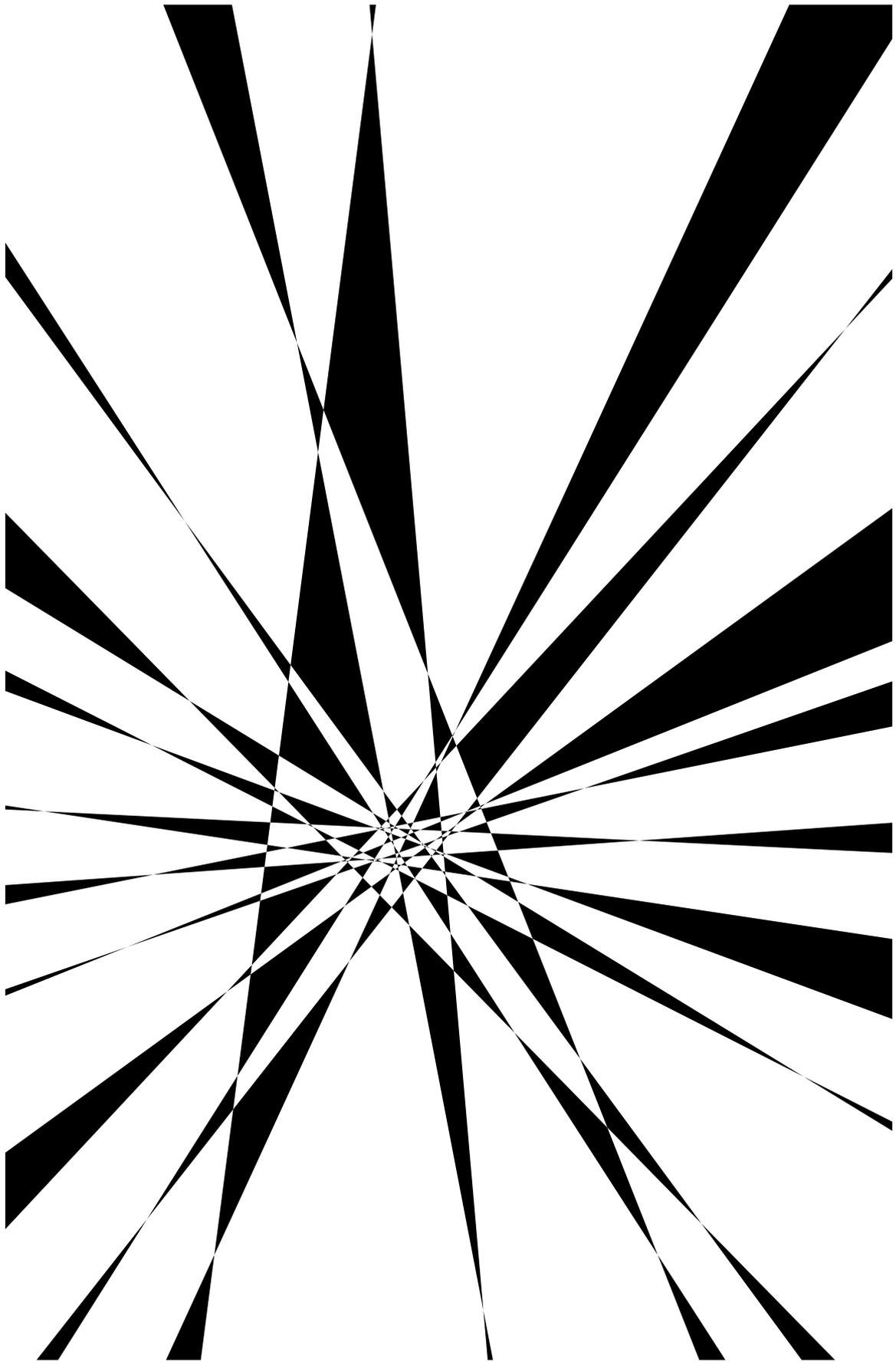


Рис. 46.  $A(21, 0) = 76$

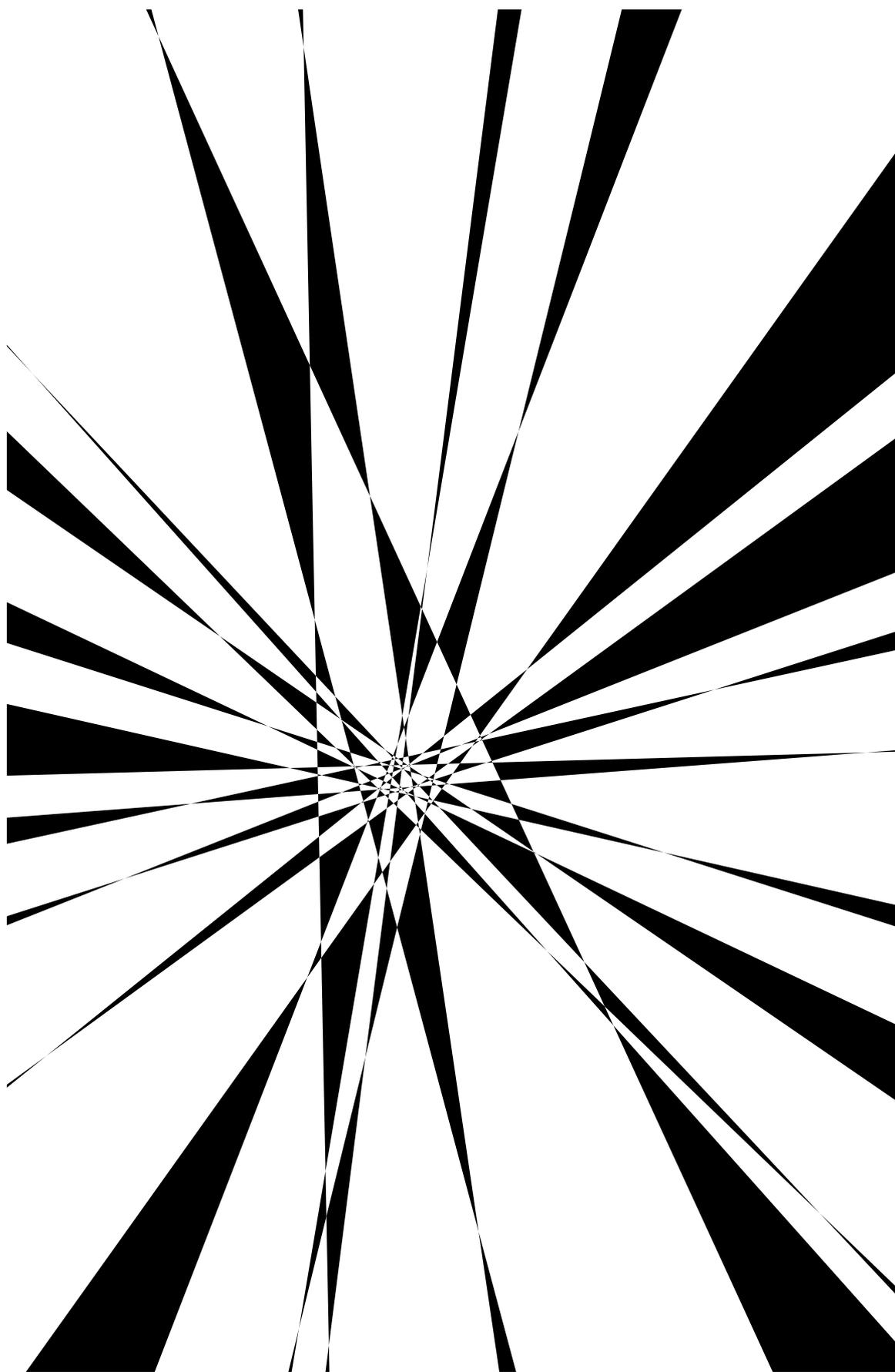


Рис. 47.  $A(23, 0) = 91$

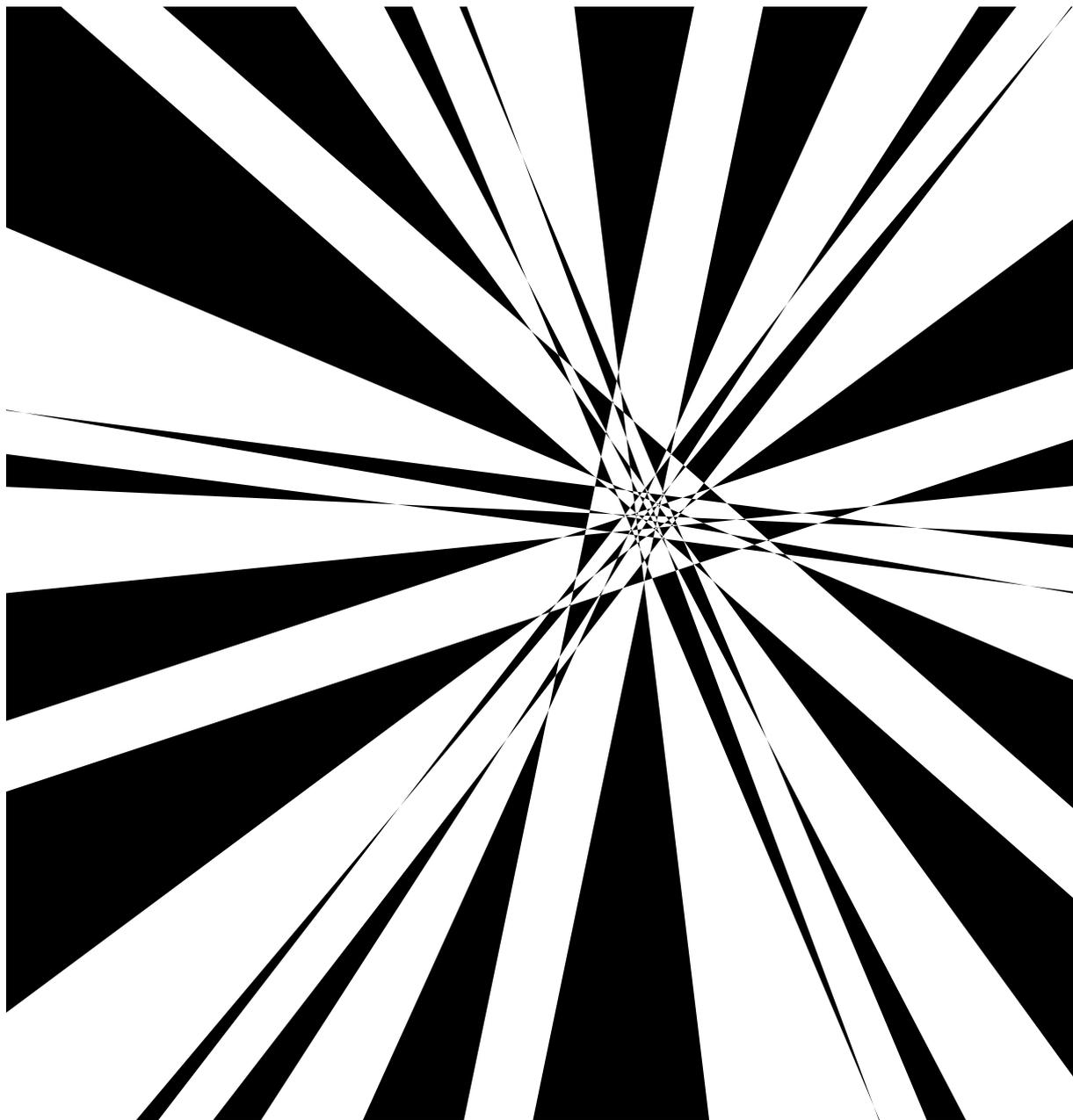


Рис. 48.  $A(24, 6) = 97$

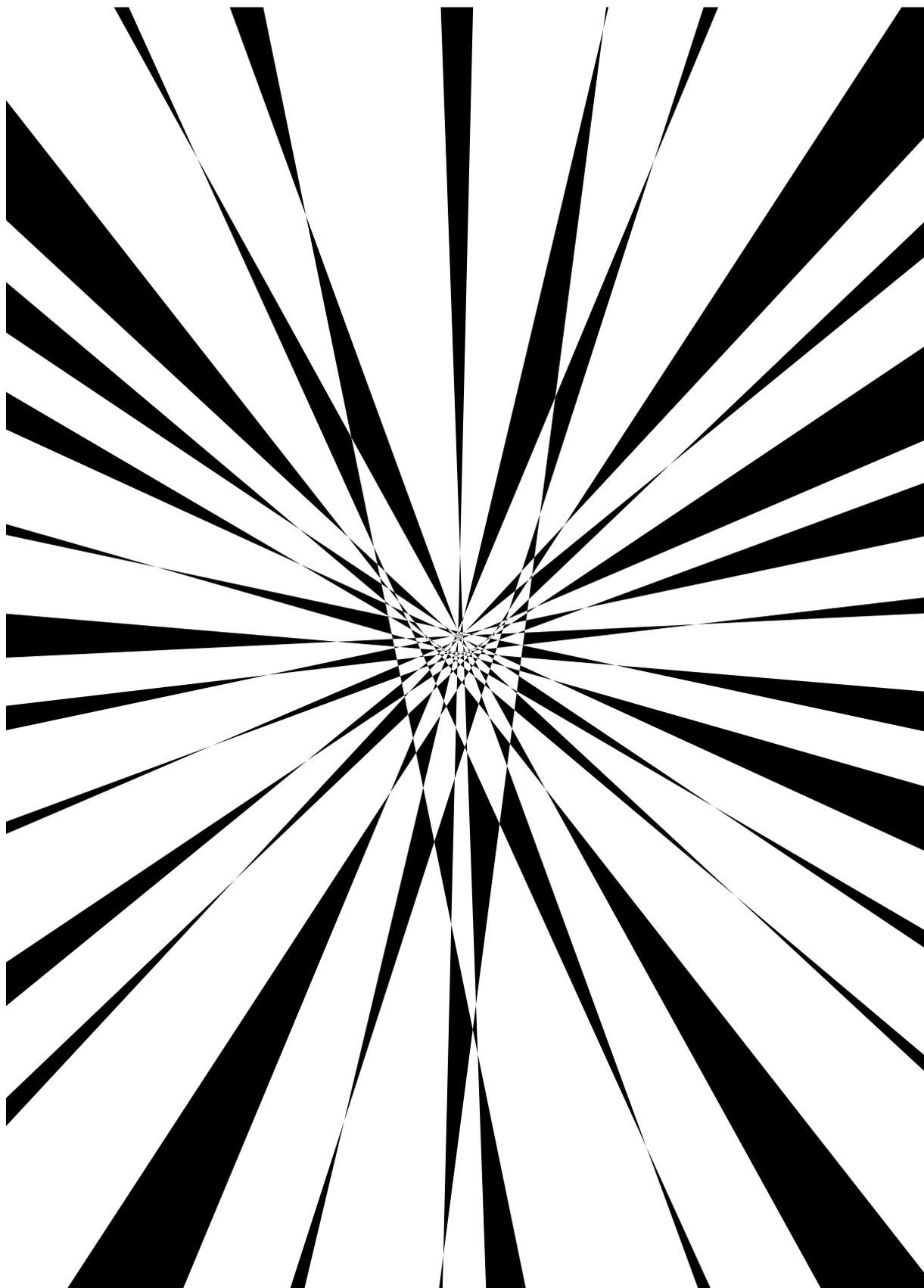


Рис. 49.  $A(29, 0) = 144$

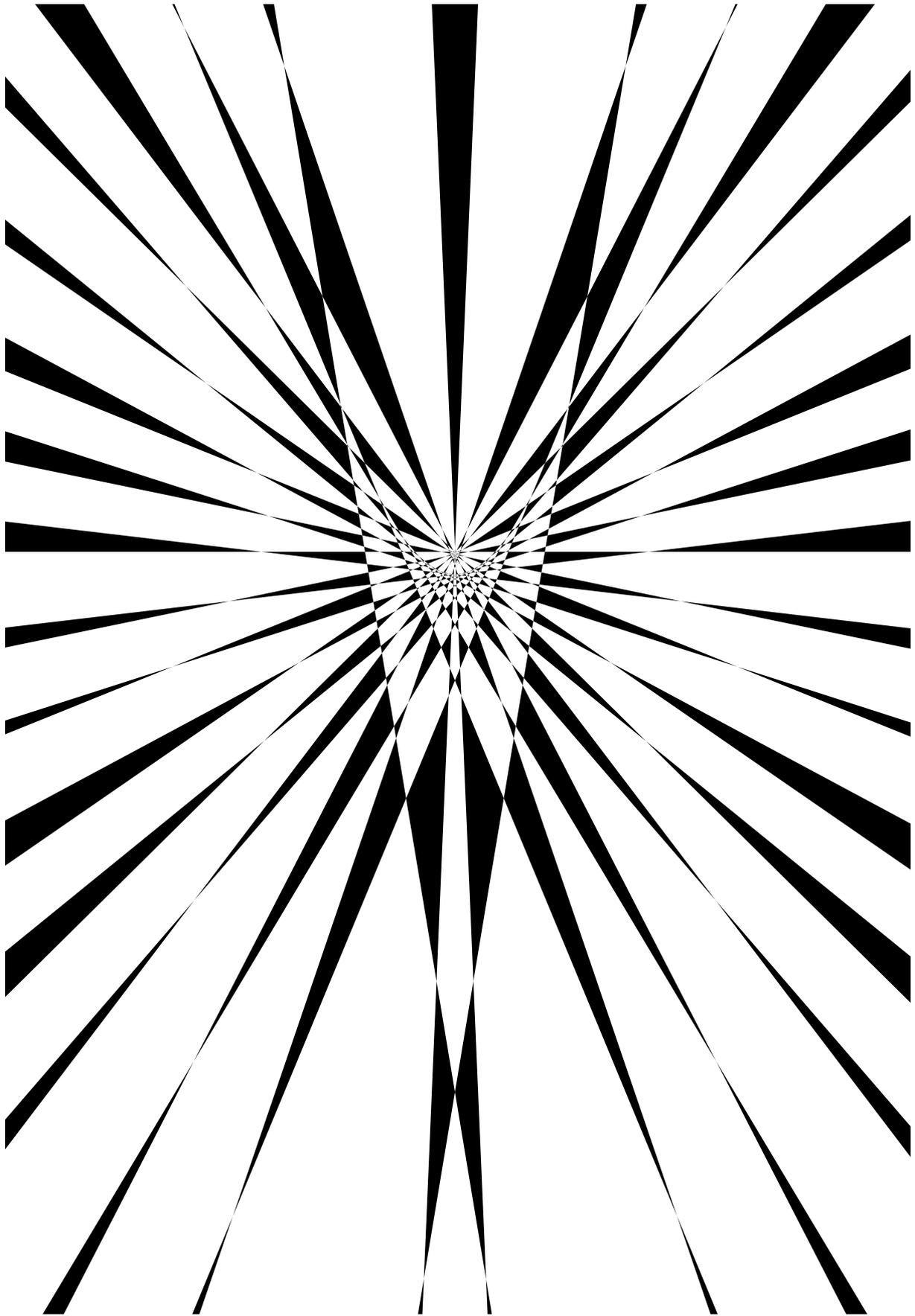


Рис. 50.  $A(33, 0) = 186$

## A.2 О нераспрямляемости одной конфигурации

Рассмотрим конфигурацию, изображенную на рис. 51. Она обладает вращательной симметрией. Мы собираемся доказать<sup>12</sup>, что она не распрямляется. Сначала обсудим идею доказательства, а затем проведем все необходимые вычисления.

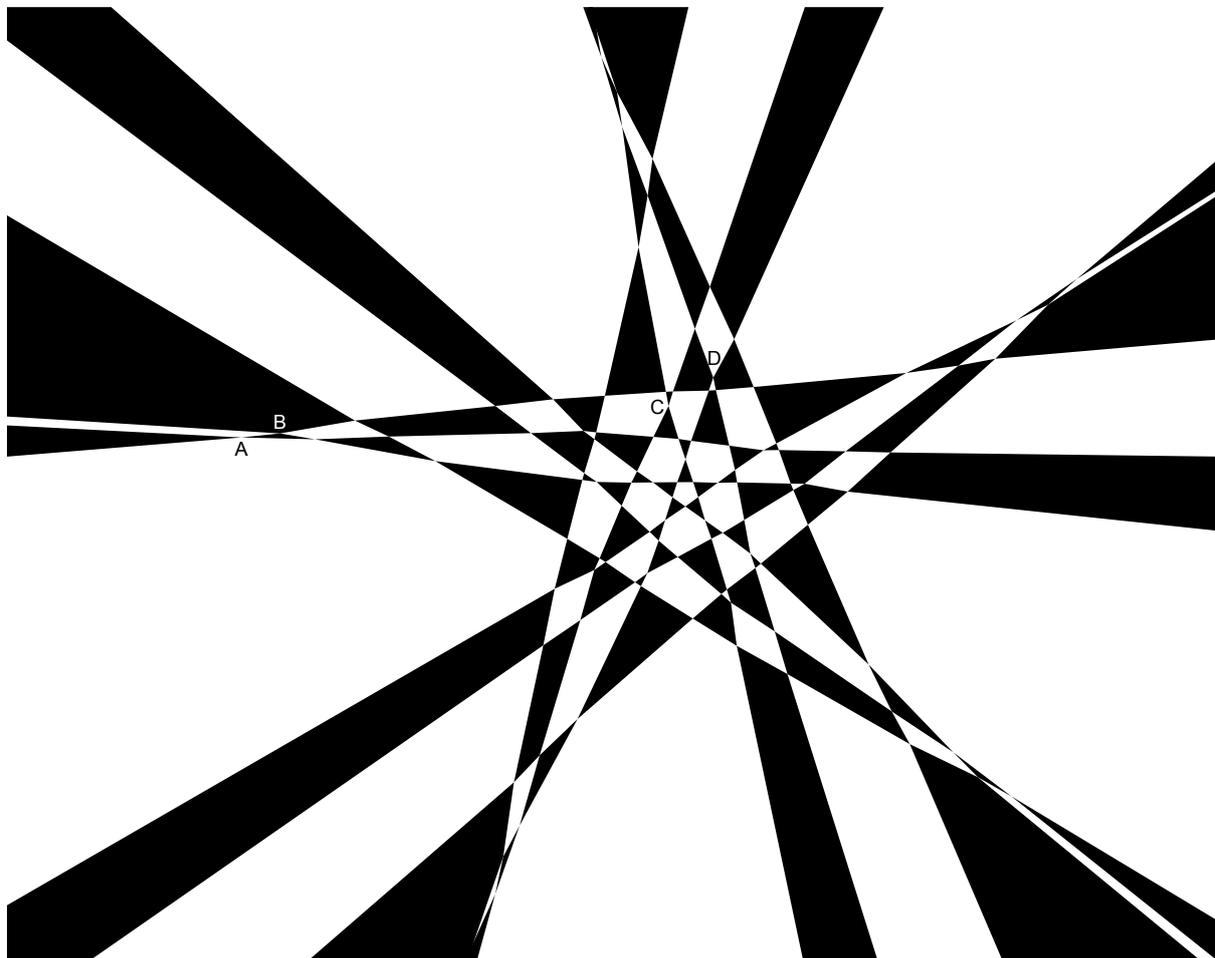


Рис. 51. Пример нераспрямляемой конфигурации из 15 линий

Требование распрямляемости данной конфигурации можно записать в виде системы нелинейных неравенств. Положение каждой прямой описывается двумя параметрами, поэтому в системе будет 30 параметров<sup>13</sup>. Одно из неравенств выражает тот факт, что точка A расположена от точек C и D дальше, чем B. Два других неравенства говорят, что точка C находится ниже прямой AB, а точка D — выше. Остальные двенадцать неравенств благодаря симметрии получаются аналогичным способом.

Доказательство нераспрямляемости сводится к доказательству несовместности полученной системы. К сожалению, из-за нелинейности провести вычисления весь-

<sup>12</sup> Это доказательство раньше входило в основной текст статьи, но потом было заменено более простым доказательством нераспрямляемости конфигурации из 8 линий. Пропуск данного раздела не мешает пониманию остальной части статьи.

<sup>13</sup> Можно ввести разумное предположение о том, что распрямленная конфигурация тоже должна обладать вращательной симметрией. Тогда число параметров снизится до 6 и доказательство упростится. Однако мы не будем требовать симметрию распрямленной конфигурации, ссылаясь на естественность и очевидность, а проведем доказательство в общем виде.

ма затруднительно, если вообще возможно. Но есть и обходной путь. Оказывается, существует такой набор параметров, при котором все неравенства вырождаются в равенства. Этот набор соответствует случаю трех правильных пятиугольников, вложенных друг в друга, стороны которых параллельны. Мы можем разложить неравенства в малой окрестности такого набора параметров до первого порядка малости. Несовместность линеаризованной системы будет означать несовместность исходной системы в этой окрестности. Для наших целей этого факта достаточно.

Действительно, все мыслимые характеристики конфигурации (количество областей, существование конкретных областей, число их сторон и т. д.) являются дискретными функциями на пространстве параметров. Поэтому из каждой точки окрестности результат можно продолжить в достаточно большие области, на которых характеристики конфигурации не изменяются. А вне этих областей конфигурации будут существенно отличаться от правильных пятиугольников, вложенных друг в друга, и, следовательно, от рассматриваемой конфигурации (рис. 51)<sup>14</sup>.

Таким образом, доказательство нераспрямляемости рассматриваемой конфигурации свелось к доказательству нераспрямляемости линеаризованной системы неравенств, к чему мы и приступаем.

Исходя из симметрии конфигурации разделим все прямые на пять групп по три прямых в каждой группе. Положение каждой прямой будем задавать двумя параметрами: расстоянием до начала координат и углом, отсчитываемым от некоторого направления. Обозначим расстояния таким образом, чтобы в каждой группе  $R_i > r_i > \rho_i > 0$ .

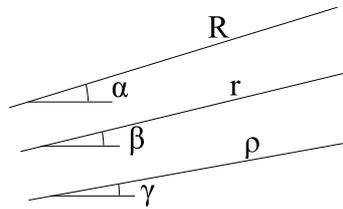


Рис. 52. Обозначения параметров в группе прямых

Если направление отсчитывается от оси абсцисс, то линия задается таким уравнением:

$$y = \frac{R}{\cos \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha.$$

Выберем направления отсчета углов, меняющиеся от группы к группе на  $2\pi/5$ . Таким образом, если  $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i = 0$ , то прямые будут образовывать правильные «концентрические» пятиугольники с параллельными сторонами.

Возьмем группу под номером  $i$  и повернем систему координат таким образом, чтобы внешняя прямая была параллельна оси абсцисс. В этой системе координат прямые будут описываться следующими уравнениями:

<sup>14</sup> Педантичные читатели могут потребовать строго доказать это утверждение. Что ж, такого доказательства у нас нет. Те, кому не очевидно, что распрямленные варианты близких карт метро должны располагаться близко в пространстве параметров, могут считать, что мы показали несовместность системы неравенств в некоторой области пространства параметров и доказали, что у конфигурации на рис. 51 нет распрямленного варианта, близкого к симметричному.

Заметим, что, помимо излагаемого доказательства, у нас имеются другие убедительные свидетельства (в частности, результаты компьютерных вычислений) в пользу нераспрямляемости рассматриваемой конфигурации.

$$\begin{aligned}
y &= R_i, \\
y \cos(\beta_i - \alpha_i) &= r_i + x \sin(\beta_i - \alpha_i), \\
y \cos(\gamma_i - \alpha_i) &= \rho_i + x \sin(\gamma_i - \alpha_i).
\end{aligned} \tag{34}$$

Отождествим внешнюю прямую с прямой АВ, тогда промежуточная прямая будет пересекать ее в точке А, а внутренняя — в точке В. Первое неравенство легко получить из условия существования треугольника со стороной АВ:  $x_A < x_B < 0$ . Находим  $x_A$  и  $x_B$  из (34), подставляем в это неравенство и после небольших преобразований получаем:

$$0 > \frac{\sin(\beta_i - \alpha_i)}{R_i \cos(\beta_i - \alpha_i) - r_i} > \frac{\sin(\gamma_i - \alpha_i)}{R_i \cos(\gamma_i - \alpha_i) - \rho_i} \tag{35}$$

Рассмотрим теперь малый треугольник с вершиной в точке D и противоположной стороной на прямой АВ. В точке D пересекается промежуточная прямая из группы с номером  $i - 1$  и внутренняя прямая из группы  $i + 1$  (для удобства будем считать, что индекс меняется циклически, то есть  $R_5 = R_0$  и т. д.). Запишем уравнения всех трех прямых:

$$\begin{aligned}
y &= R_i, \\
y \cos(\beta_{i-1} - \alpha_i - 2\pi/5) &= r_{i-1} + x \sin(\beta_{i-1} - \alpha_i - 2\pi/5), \\
y \cos(\gamma_{i+1} - \alpha_i + 2\pi/5) &= \rho_{i+1} + x \sin(\gamma_{i+1} - \alpha_i + 2\pi/5).
\end{aligned} \tag{36}$$

Чтобы точка D была выше прямой АВ, точка пересечения первой и второй прямой должна лежать правее точки пересечения первой и третьей прямой. Мы получили второе неравенство:

$$\frac{R_i \cos(\beta_{i-1} - \alpha_i - 2\pi/5) - r_{i-1}}{\sin(\beta_{i-1} - \alpha_i - 2\pi/5)} > \frac{R_i \cos(\gamma_{i+1} - \alpha_i + 2\pi/5) - \rho_{i+1}}{\sin(\gamma_{i+1} - \alpha_i + 2\pi/5)}. \tag{37}$$

Аналогично рассматривается треугольник с вершиной в точке С. Уравнения прямых отличаются от (36) заменой  $i - 1$  на  $i + 1$  и наоборот и изменением знака перед  $2\pi/5$ . Промежуточная прямая из группы  $i + 1$  пересекает прямую АВ правее внутренней прямой из группы  $i - 1$ . Окончательно получаем третье неравенство:

$$\frac{R_i \cos(\beta_{i+1} - \alpha_i + 2\pi/5) - r_{i+1}}{\sin(\beta_{i+1} - \alpha_i + 2\pi/5)} > \frac{R_i \cos(\gamma_{i-1} - \alpha_i - 2\pi/5) - \rho_{i-1}}{\sin(\gamma_{i-1} - \alpha_i - 2\pi/5)}. \tag{38}$$

Непосредственная проверка показывает, что подстановка в (35), (37) и (38) значений  $R_i = R$ ,  $r_i = r$ ,  $\rho_i = \rho$ ,  $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i = 0$ , где величины  $R$ ,  $r$  и  $\rho$  связаны соотношением

$$2R \cos \frac{2\pi}{5} = r + \rho, \tag{39}$$

превращает эти неравенства в равенства. Мы собираемся разложить неравенства в окрестности этих значений до первого порядка малости. Чтобы упростить обозначения и не писать значки приращений, будем считать  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  и  $\gamma_i$  малыми параметрами.

Теперь мы знаем, положительны ли знаменатели или нет, и можем определить, будет ли меняться знак неравенства на противоположный при домножении на знаменатели. Из (37):

$$\begin{aligned}
&(r_{i-1} - R_i \cos(2\pi/5 - \beta_{i-1} + \alpha_i)) \sin(2\pi/5 + \gamma_{i+1} - \alpha_i) + \\
&+ (\rho_{i+1} - R_i \cos(2\pi/5 + \gamma_{i+1} - \alpha_i)) \sin(2\pi/5 - \beta_{i-1} + \alpha_i) > 0.
\end{aligned}$$

Раскладываем до первого порядка:

$$\begin{aligned} & \left( r + \delta r_{i-1} - (R + \delta R_i) \left( \cos \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} (\beta_{i-1} - \alpha_i) \right) \right) \left( \sin \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} (\gamma_{i+1} - \alpha_i) \right) + \\ & + \left( \rho + \delta \rho_{i+1} - (R + \delta R_i) \left( \cos \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5} (\gamma_{i+1} - \alpha_i) \right) \right) \left( \sin \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} (\beta_{i-1} - \alpha_i) \right) > 0. \end{aligned}$$

Мы выбрали значения параметров таким образом, чтобы в нулевом порядке левая часть занулялась. Оставляем только первый порядок:

$$\begin{aligned} & (\delta r_{i-1} + \delta \rho_{i+1} - 2\delta R_i \cos \frac{2\pi}{5}) \sin \frac{2\pi}{5} + (\gamma_{i+1} - \alpha_i) \left( r \cos \frac{2\pi}{5} + R \left( \sin^2 \frac{2\pi}{5} - \cos^2 \frac{2\pi}{5} \right) \right) - \\ & - (\beta_{i-1} - \alpha_i) \left( \rho \cos \frac{2\pi}{5} + R \left( \sin^2 \frac{2\pi}{5} - \cos^2 \frac{2\pi}{5} \right) \right) > 0. \end{aligned}$$

Аналогично находим из (38):

$$\begin{aligned} & (\delta r_{i+1} + \delta \rho_{i-1} - 2\delta R_i \cos \frac{2\pi}{5}) \sin \frac{2\pi}{5} - (\gamma_{i-1} - \alpha_i) \left( r \cos \frac{2\pi}{5} + R \left( \sin^2 \frac{2\pi}{5} - \cos^2 \frac{2\pi}{5} \right) \right) + \\ & + (\beta_{i+1} - \alpha_i) \left( \rho \cos \frac{2\pi}{5} + R \left( \sin^2 \frac{2\pi}{5} - \cos^2 \frac{2\pi}{5} \right) \right) < 0. \end{aligned}$$

Умножим последнее неравенство на  $-1$  и сложим с предпоследним для всех  $i$ . Приращения расстояний взаимно уничтожатся. Коэффициенты перед углами можно упростить, если вспомнить связь (39) между  $R$ ,  $r$  и  $\rho$  и основное тригонометрическое тождество. Получаем:

$$(\Sigma \gamma_i - \Sigma \alpha_i) \left( R - \rho \cos \frac{2\pi}{5} \right) - (\Sigma \beta_i - \Sigma \alpha_i) \left( R - r \cos \frac{2\pi}{5} \right) > 0.$$

Теперь разложим (35) до первого порядка и просуммируем по всем  $i$ :

$$0 > \frac{\Sigma \beta_i - \Sigma \alpha_i}{R - r} > \frac{\Sigma \gamma_i - \Sigma \alpha_i}{R - \rho} \quad (40)$$

Последнее неравенство дает ограничение сверху на  $\Sigma \gamma_i - \Sigma \alpha_i$ , а предпоследнее — снизу. Сравнивая эти ограничения, получаем:

$$(\Sigma \beta_i - \Sigma \alpha_i) \left( (R - \rho) \left( R - \rho \cos \frac{2\pi}{5} \right) - (R - r) \left( R - r \cos \frac{2\pi}{5} \right) \right) > 0. \quad (41)$$

Легко видеть, что функция

$$(R - x) \left( R - x \cos \frac{2\pi}{5} \right),$$

имеющая корни в точках  $R$  и  $R/\cos(2\pi/5)$ , убывает при  $x < R$ . Поскольку  $\rho < r < R$ , второй сомножитель в (41) положителен. В силу (40) первый сомножитель отрицателен, поэтому полученное неравенство неверно. Противоречие. Линеаризованная система неравенств несовместна. Нераспрямляемость исследуемой конфигурации доказана.

## **А.3 Направления дальнейших исследований**

### **А.3.1 Природа дефектов**

Теоремы 7...10 позволяют понять причину появления ряда дефектов и улучшить оценку сверху (23). Комбинированная оценка сверху совпадает практически со всеми результатами вычислений. Случай  $n = 11$  является пока единственным найденным исключением. В чем причина появления дополнительных дефектов? Действительно ли это единственное исключение, или при больших  $n$ , недоступных (пока?) для компьютерных вычислений, такие дефекты тоже появляются?

### **А.3.2 Симметрия**

Многие конфигурации обладают симметрией — точной или «слегка» нарушенной. На практике встречались конфигурации с зеркальной или вращательной симметрией. Так, конфигурации на рис. 14 и 40 обладают вращательной симметрией. Конфигурации на рис. 14, 17, 38 обладают зеркальной симметрией.

На рис. 35 приведена конфигурация  $A(10, 2) = 16$  с нарушенной зеркальной симметрией. В ней ось симметрии вертикальна. Почти все области связаны такой симметрией. Исключение — дефект справа. Однако след нарушенной симметрии остается — дефект может быть переброшен симметрично относительно оси справа налево. Аналогичная ситуация наблюдается в конфигурации  $A(11, 0) = 19$  на рис. 36. Более того, эту конфигурацию можно получить из предыдущей добавлением одной прямой.

Исследование зеркальной симметрии уже привело к открытию оберток. В исследованиях вращательной симметрии были найдены нераспрямляемые конфигурации. Важна ли симметрия в теоретических построениях?

### **А.3.3 Поиск других оберток**

Существуют ли другие обертки, кроме перечисленных в разделе 6? Можно ли доказать, что других оберток нет? Известные обертки порождаются кривыми второго порядка. Какими кривыми могут порождаться новые обертки?

## Список литературы

- [1] Арнольд, В. И. Задачи Арнольда / В. И. Арнольд; под ред. М. Б. Северюка, В. Б. Филиппова. — М.: ФАЗИС, 2000. — С. 54, задача № 1983–4.
- [2] Чеканов, Ю. В. Асимптотика числа максимумов произведения линейных функций двух переменных. Вестник Московского Университета, сер. 1. Мат. Мех. 1986, № 3 — С. 93–94.
- [3] Сосинский, А. Б. Узлы и косы. — М.: МЦНМО, 2001. — 24 с. (Библиотека «Математическое просвещение», выпуск 10).