Séries Formelles

Partie 1/2

par

Enrico Formenti

Mai 2023

Plan

- Récurrences
  - Quelques cas particuliers
  - La méthode de la matrice compagnon
- Séries formelles (ordinaires)
- La méthode des séries génératrices
- Récurrences non-linéaires
  - Récurrences de Riccati
  - Les cycles de Lyness
  - La variante de Çinar

Récurrences

(Relation de) Récurrence

Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Etant donné une séquence (dénombrable) U d'éléments de $\mathbb{K}$, une récurrence est une équation qui exprime le n-ième élément de U en fonction d'un nombre fini d'éléments qui le précédent. Plus formellement, notons u_n l'énième élément de U alors

$$u_n = f(n, u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_{n-p})$$

pour une fonction $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}$ fixée est une récurrence d'ordre p.

Problème de Cauchy

Définition

Soient $p > 0$, $u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_{n-p}, n)$ une récurrence sur $\mathbb{K}$ de degré p alors le système :

$$\begin{cases} u_n & = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_{n-p}, n) \\ u_{p-1} & = a_{p-1} \\ & \vdots \\ u_0 & = a_0 \end{cases}$$

est un problème de Cauchy pour U avec conditions initiales $u_i = a_i \in \mathbb{K}$ pour $i \in \{0, \ldots, p-1\}$.

Problème de Cauchy

Définition

Étant donné le problème de Cauchy suivant (sur $\mathbb{K}$) :

$$\begin{cases} u_n & = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_{n-p}, n) \\ u_{p-1} & = a_{p-1} \\ & \vdots \\ u_0 & = a_0 \end{cases} \tag{1}$$

une fonction $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ est solution de (1) ssi $u_n = g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et g ne dépend que de n).

Problème de Cauchy

Remarque

Chaque système dynamique $\langle X, f\rangle$ pour un $x_0 \in X$ fixé induit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_t & = f^{t-p+1}(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}, t) \\ u_{p-1} & = x_{p-1} \\ & \vdots \\ u_0 & = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

dont la solution est ce que nous appelons orbite de f de condition initiale $x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$.

Problème de Cauchy : questions

- Est-ce qu'un problème de Cauchy a toujours une solution ?
- Est-ce que les solutions sont uniques ?
- Si un problème comporte seulement des fonctions calculables, est-ce que la solution est calculable ?

Récurrences linéaires

Définition

Une récurrence est linéaire ssi son équation est de la forme :

$$u_n = f(n) + \sum_{k=0}^{n-p} a_k(n) \cdot u_k \tag{3}$$

avec $a_i(n), f(n)$ des fonctions définies sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. Si $f(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors la récurrence est homogène. Si pour tout $k \in \{0, \ldots, n-p\}$, les fonctions $u_k(n)$ sont constantes alors (3) est dite à coefficients constants. Si $u_k(n) \neq 0$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n-p\}$ alors (3) est complète.

Exemples

- $\forall n > 0,\ u_n = 1 + 3 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} u_k$
- $\forall n > 0,\ u_n = u_{n-1} + 2^n$
- $\forall n > 0,\ u_{n+1} = 2 \cdot u_{n-1} + 1$

Cas 1 : coeff. constants, ordre 1

$$\begin{cases} u_n &= a \cdot u_{n-1} + b \\ u_0 &= c \end{cases}$$

On va utiliser la méthode sommation

$$\begin{array}{rcll}
a^0 \cdot u_n &=& a \cdot u_{n-1} &+ \; a^0 \cdot b \\
a^1 \cdot u_{n-1} &=& a^2 \cdot u_{n-2} &+ \; a \cdot b \\
a^2 \cdot u_{n-2} &=& a^3 \cdot u_{n-3} &+ \; a^2 \cdot b \\
&\vdots&& \\
a^{n-1} \cdot u_1 &=& a^n \cdot u_0 &+ \; a^{n-1} \cdot b \\
\hline
u_n &=& a^n \cdot u_0 &+ \; b \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k \\
u_n &=& a^n c &+ \; b \frac{a^n - 1}{a-1}
\end{array}$$

Cas 2 : coeff. constants, homogène

$$\begin{cases} u_n & = & \sum_{k=1}^{p} a_{n-k} \cdot u_{n-k} \\ u_{p-1} & = & c_{p-1} \\ & \vdots & \\ u_0 & = & c_0 \end{cases}$$

On utilise la méthode du polynôme caractéristique :

$$X^p = \sum_{k=0}^{p} a_k \cdot X^k$$

c-est-à-dire :

(suite...)

$$X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k \cdot X^k = 0 \tag{4}$$

On trouve les racines de (4) : $(s_1)^{l_1}, \ldots, (s_h)^{l_h}$ avec $l_1 + l_2 + \ldots + l_h = p$. Alors

$$u_n = \sum_{k=1}^{h} \sum_{i=0}^{l_k} c_{k,i} n^i \cdot (s_k)^n$$

Exemple

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_n & = & u_{n-1} + u_{n-2} \\ u_1 & = & 1 \\ u_0 & = & 1 \end{cases}$$

Son polynôme caractéristique est :

$$X^2 = X + 1$$

qui a comme solution $s_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $s_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et donc la solution générale est :

$$u_n = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{5}$$

(suite...)

Pour $n = 0$ de (5) on tire : $a + b = 1$ et pour $n = 1$ on trouve $a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$ ce qui donne lieu au système suivant :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Multipliant par 2 la deuxième et ensuite en sous-trayant la première de la deuxième :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} a = \frac{5+\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{5}\phi \\ b = \frac{5-\sqrt{5}}{10} = -\frac{\sqrt{5}}{5}(1-\phi) \end{cases}$$

(suite et fin)

Ce qui donne comme résultat final :

$$
\begin{aligned}
u_n &= \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\phi^{n+1} - (1-\phi)^{n+1}\right]
\end{aligned}
$$

Cas 3 : complète, coeff. constants

Supposons d'avoir la récurrence suivante

$$u_n = c + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot u_k \tag{6}$$

alors il suffira de soustraire deux termes successifs pour tomber sur une série géométrique :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left[c + \textstyle\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot u_k\right] - \left[c + \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot u_k\right] \\ &= a_n u_n \end{aligned}$$

et donc

$$u_{n+1} = (a_n + 1)u_n \quad \textit{i.e.} \quad u_n = (a_{n-1} + 1)u_{n-1} = (a_{n-1} + 1)^n u_0$$

Exercices

Exercice 1

Résolvez le problème de Cauchy suivant par la méthode des séries génératrices :

$$\begin{cases} u_n & = & 3\sum_{k=0}^{n-1} u_k + 1 \\ u_0 & = & 1 \end{cases}$$

Exercice 2

Résolvez le problème de Cauchy suivant par la méthode des séries génératrices :

$$\begin{cases} u_n & = & 3\sum_{k=0}^{n-1} (u_k + 1) \\ u_0 & = & 1 \end{cases}$$

Équations de partition

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_n & = & au_{n/p} + b \\ u_1 & = & 1 \end{cases}$$

pour $a, b \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ avec $a \neq 0$ et $p > 1$. Pour trouver la solution il conviendra d'utiliser la substitution $n = p^k$ (et donc $k = \log_p n$) :

$$\begin{cases} u_{p^k} & = & au_{p^{k-1}} + b \\ u_1 & = & 1 \end{cases}$$

maintenant en posant $s_k = u_{p^k}$ on obtient :

$$\begin{cases} s_k & = & as_{k-1} + b \\ s_0 & = & 1 \end{cases}$$

et puis on procède comme d'habitude.

Exercices

Exercice 3

Résolvez le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} t_n &= 2 \cdot t_{n/2} \\ t_1 &= 1 \end{cases}$$

Exercice 4

Résolvez le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} t_n &= 7 \cdot t_{n/2} + n^2 \\ t_1 &= \frac{2}{3} \end{cases}$$

Méthode de la matrice compagnon

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_n & = & P(n) + \sum_{k=1}^{p} a_{n-k} \cdot u_{n-k} \\ u_{p-1} & = & c_{p-1} \\ & \vdots & \\ u_0 & = & c_0 \end{cases} \tag{7}$$

avec $P(n)$ un polynôme en n à coefficients sur $\mathbb{K}$ et $a_k, c_k \in \mathbb{K}$ des constantes.

Cas 1 : $P(n) = 0$

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ \vdots \\ u_{n-p+2} \\ u_{n-p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_{n-p+1} & a_{n-p} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_{n-p+1} \\ u_{n-p} \end{bmatrix}$$

Maintenant posons :

$$Z_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ \vdots \\ u_{n-p+2} \\ u_{n-p+1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_{n-p+1} & a_{n-p} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(suite...)

alors nous pouvons réécrire comme suit :

$$Z_n = M \times Z_{n-1}$$

Nous avons donc un système dynamique discret linéaire dont nous connaissons déjà l'expression de l'équation d'orbite :

$$Z_n = M^{n-p+1} Z_{p-1} \quad \text{avec} \quad Z_{p-1} = \begin{bmatrix} c_{p-1} \\ c_{p-2} \\ \vdots \\ c_0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Attention ! Calculer M^n est parfois assez couteux mais si M est diagonalisable alors tout change !

Cas 1.a : valeurs propres distincts

On sait que le polynôme caractéristique $P_M(\lambda)$ de M est :

$$P_M(\lambda) = \lambda^{p+1} - \lambda^p a_{n-1} - \lambda^{p-1} a_{n-2} - \ldots - \lambda a_{n-p+1} - a_{n-p}$$

alors en posant $P_M(\lambda) = 0$ on trouvera p solutions

$$\lambda_{p-1}, \lambda_{p-2}, \ldots, \lambda_0$$

que, par hypothèse, on considérera toutes distinctes. Donc M est diagonalisable et peut alors s'écrire comme BDB^{-1} où

$$D = diag(\lambda_{p-1}, \lambda_{p-2}, \ldots, \lambda_0) \quad \text{et} \quad B = [b_{p-1}, \ldots, b_0]$$

avec b_i les vecteurs propres relatifs aux valeurs propres λ_i.

(suite...)

Alors

$$\begin{aligned} M^{n-p+1} &= \left(BDB^{-1}\right)^{n-p+1} = \underbrace{BDB^{-1}BDB^{-1}\cdots BDB^{-1}BDB^{-1}}_{BDB^{-1} \text{ répété } n-p+1 \text{ fois}} \\ &= BD^{n-p+1}B^{-1} \end{aligned}$$

et donc

$$Z_n = BD^{n-p+1}B^{-1}Z_{p-1}$$

et sa première ligne donnera la solution finale.

Et si on faisait plus simple...(?!)

Reprenons le cas précédent à partir du point où l'on a trouvé les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants.

Lemme

Pout tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n v_i = \lambda_i^n v_i$ si λ_i est une valeur propre de M et v_i le vecteur propre correspondant.

Preuve. Par induction sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 1$, $Mv_i = \lambda_i v_i$ est juste la définition de valeur propre.
Supposons la thèse vraie pour $n > 1$. Alors on a

$$M^{n+1} v_i = M(M^n v_i) \underset{\text{hyp}}{=} M(\lambda_i^n v_i) = \lambda_i^n M v_i = \lambda_i^{n+1} v_i \quad \square$$

(suite...)

Alors nous pouvons réécrire Z_{p-1} dans (8) comme combinaison linéaire des vecteurs propres de M [1] :

$$Z_{p-1} = a_{p-1}b_{p-1} + a_{p-2}b_{p-2} + \ldots + a_0 b_0$$

et on résout le système induit pour trouver la valeur des a_i.
D'après le lemme précédent on trouve :

$$\begin{array}{rcl} Z_n & = & M^{n-p+1}Z_{p-1} \\ & = & M^{n-p+1}(a_{p-1}b_{p-1} + a_{p-2}b_{p-2} + \ldots + a_0 b_0) \\ & = & a_{p-1}M^{n-p+1}b_{p-1} + \ldots + a_0 M^{n-p+1}b_0 \\ & = & a_{p-1}\lambda_{p-1}^{n-p+1}b_{p-1} + \ldots + a_0\lambda_0^{n-p+1}b_0 \end{array}$$

1. C'est toujours possible car les valeurs propres sont tous distincts.

Exemple

Reprenons la récurrence de Fibonacci (décalée) :

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad \text{avec } u_1 = u_0 = 1$$

Alors on trouve :

$$Z_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad Z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nous avons $P_M(\lambda) = -\lambda(1-\lambda) - 1$ et donc on trouve deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \phi$$

Les valeurs propres sont distincts donc M est diagonalisable !
Cherchons donc B et D telles que $M = BDB^{-1}$.

(suite...)

Pour la matrice D c'est facile :

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

et $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ où b_1 et b_2 ces sont les vecteurs propres par rapport à λ_1 et λ_2
Pour trouver $b_1 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix}^T$ il suffit de résoudre

$$(M - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

et on trouve $b_1 = \begin{bmatrix} \phi & 1 \end{bmatrix}^T$
De manière similaire on trouve $b_2 = \begin{bmatrix} 1 - \phi & 1 \end{bmatrix}^T$

(suite...)

ce qui donne

$$B = \begin{bmatrix} \phi & 1-\phi \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B^{-1} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{bmatrix} 1 & \phi - 1 \\ -1 & \phi \end{bmatrix}$$

Donc en reprenant tout :

$$\begin{aligned}
Z_n &= \begin{bmatrix} \phi & 1-\phi \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{n-1} & 0 \\ 0 & (1-\phi)^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{bmatrix} 1 & \phi - 1 \\ -1 & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \phi^n & (1-\phi)^n \\ \phi^{n-1} & (1-\phi)^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{bmatrix} 1 & \phi - 1 \\ -1 & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \phi^n - (1-\phi)^n & -(1-\phi)\phi^n + \phi(1-\phi)^n \\ \phi^{n-1} - (1-\phi)^{n-1} & -(1-\phi)\phi^{n-1} + \phi(1-\phi)^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \\
&= \begin{bmatrix} \phi^{n+1} - (1-\phi)^{n+1} \\ \phi^n - (1-\phi)^n \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}
\end{aligned}$$

Cas 1.b : valeurs propres multiples

Soient $\lambda_k, \lambda_{k-1}, \ldots, \lambda_1$ les valeurs propres de M et $m_k, m_{k-1}, \ldots, m_1$ alors la solution générale sera :

$$Z_n = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{m_j} a_{j,i} n^i (s_j)^n$$

où les $a_{j,i}$ ces sont des constantes à déterminer grâce aux conditions initiales.

Cas 2 : $P(n) \neq 0$

Si l'on pose

$$B_n = \begin{bmatrix} P(n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

alors on peut réécrire notre récurrence comme :

$$Z_n = MZ_{n-1} + B_n$$

et donc en déroulant :

$$Z_n = M^{n-p+1} Z_{p-1} + \sum_{k=0}^{n-p} M^k B_{n-k} \tag{9}$$

Exemple

Considérons une variante non-homogène de la suite de Fibonacci et essayons de résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_{n+2} & = & u_{n+1} + u_n + 1 \\ u_1 & = & 1 \\ u_0 & = & 1 \end{cases}$$

Alors nous sommes dans la situation précédente avec

$$p = 2, \quad Z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_{n+p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

donc la (9) dévient :

$$Z_n = M^{n-1} Z_1 + \sum_{k=0}^{n-2} M^k B_p$$

(suite...)

Comme $M - I$ est inversible et son inverse est M alors :

$$\begin{aligned} Z_n = M^{n-1}Z_1 + \frac{M^{n-1}-I}{M-I}B_2 &= M^{n-1}Z_1 + (M^{n-1} - I)MB_2 \\ &= M^{n-1}Z_1 + (M^n - M)B_2 \\ &= M^{n-1}Z_1 + M^nB_2 - [1,1]^T \end{aligned}$$

On connait déjà le valeurs propres de M ainsi que deux vecteurs propres associés. On connait aussi comme écrire Z_1 comme combinaison linéaire de ces vecteurs. Il nous reste à trouver l'expression de B_2 comme combinaison linéaires de mêmes vecteurs propres :

(suite...)

$$a \cdot \begin{bmatrix} \phi \\ 1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 1-\phi \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ce qui donne lieu au système suivant :

$$\begin{cases} a\phi + b(1-\phi) & = & 1 \\ a + b & = & 0 \end{cases}$$

qui a pour solution

$$\begin{cases} a & = & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ b & = & -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

(suite et fin.)

En mettant tout ensemble on trouve

$$
\begin{aligned}
Z_n &= \left\{ \frac{\sqrt{5}\phi}{5}\phi^{n-1}\begin{bmatrix}\phi\\1\end{bmatrix} - \frac{\sqrt{5}(1-\phi)}{5}(1-\phi)^{n-1}\begin{bmatrix}1-\phi\\1\end{bmatrix}\right\} \\
&\quad + \left\{ \frac{\sqrt{5}}{5}\phi^{n}\begin{bmatrix}\phi\\1\end{bmatrix} - \frac{\sqrt{5}}{5}(1-\phi)^{n}\begin{bmatrix}1-\phi\\1\end{bmatrix}\right\} \\
&\quad - \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \\
&= 2\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix}\phi^{n+1}-(1-\phi)^{n+1}\\ \phi^{n}-(1-\phi)^{n}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}2F_n - 1\\ 2F_{n-1}-1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

et donc $u_n = 2F_n - 1$.

Séries formelles (ordinaires)

Idée

$$\underbrace{\begin{matrix} u_0 & u_1 & u_2 & \ldots & u_n & \ldots \\ X^0 & X^1 & X^2 & \ldots & X^n & \ldots \end{matrix}}$$

$$\Downarrow$$

$$u_0X^0 \quad u_1X^1 \quad u_2X^2 \quad \ldots \quad u_nX^n \quad \ldots$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_nX^n$$

Séries formelles (ordinaires)

Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Une série formelle (ordinaire) sur $\mathbb{K}$ à une indéterminée X est une suite infinie de valeurs u_n dans $\mathbb{K}$ notée

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n \tag{10}$$

Remarque

Pour nous $\mathbb{K}$ seront toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ munis des opérations de somme et produit usuelles.

Exemples

- $1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$ est $\sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ avec $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $1, 1, 0, \ldots, 0, \ldots$ est $\sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ avec $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ est $\sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ avec $u_n = \frac{(-1)^n + 1}{2}$
- $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ est $\sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ avec $u_n = \frac{(-1)^{n+1} + 1}{2}$
- $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ est $\sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ avec $u_n = n$

Raccourcis

Pour faire simple on notera par :

- 0 la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ avec $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- 1 la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ avec $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $1 + X$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ avec $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $2X^2$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ avec $u_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- *Etc...*

Somme de séries formelles

Définition

Soient $U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot X^n$ et $V = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cdot X^n$ deux séries formelles sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$ alors leur somme est définie ainsi :

$$U + V = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) \cdot X^n$$

Remarque : les séries formelles forment un groupe par rapport à la somme et la série 0 est l'élément neutre du groupe.

Exemple

Prenons

$U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ avec $u_n = \frac{(-1)^n+1}{2}$

et

$V = \sum_{n=0}^{\infty} v_n X^n$ avec $v_n = \frac{(-1)^{n+1}+1}{2}$.

Alors

$$U + V = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) X^n = \sum_{n=0}^{\infty} X^n$$

Produit de séries formelles

Définition

Soient $U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot X^n$ et $V = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cdot X^n$ deux séries formelles sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ alors leur produit est défini ainsi :

$$U \cdot V = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \right)}_{c_n} \cdot X^n$$

Donc l'ens. des séries formelles est fermé par rapport à l'opération de produit et la série 1 est l'élément neutre du produit.

Exemple

Prenons

$U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ avec $u_n = \frac{(-1)^n+1}{2}$

et

$V = \sum_{n=0}^{\infty} v_n X^n$ avec $v_n = \frac{(-1)^{n+1}+1}{2}$.

Alors

$$UV = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \right)}_{c_n} X^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{i+j=n} u_i v_j \right)}_{c_n} X^n$$

comprendre comment évaluer la somme qui donne c_n n'est pas évident donc faisons quelques considérations :

Exemple (suite et fin)

si n est pair et k est pair alors $n-k$ est impair et donc $u_k v_{n-k} = 1$

si n est pair et k est impair alors $n-k$ est pair et donc $u_k v_{n-k} = 0$

si n est impair et k est pair alors $n-k$ est impair et donc $u_k v_{n-k} = 1$

si n est impair et k est impair alors $n-k$ est pair et donc $u_k v_{n-k} = 0$

Alors on trouve

$$c_n = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{(-1)^{n+1}+1}{2} + \frac{n}{2} \cdot \frac{(-1)^n+1}{2} = \frac{2n-1-(-1)^{n+1}}{4}$$

c.-à-d.

UV représente la séquence $0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$

Inverse d'une série formelle

Définition

On dit que la série formelle $V = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cdot X^n$ sur $\mathbb{K}$ est l'inverse de la série $U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot X^n$ sur $\mathbb{K}$ ssi $UV = VU = 1_{\mathbb{K}}$. Si U admet une inverse alors on dit qu'elle est inversible.

Théorème

Une série formelle $U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot X^n$ sur $\mathbb{K}$ est inversible ssi $u_0 \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Inverse d'une série formelle

Preuve

Soit $U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot X^n$ une série formelle sur $\mathbb{K}$ avec $u_0 = 0_{\mathbb{K}}$ et, par l'absurde, soit $V = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cdot X^n$ son inverse alors par la définition d'inverse on a :

$$UV = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{i+j=n} u_i v_j \right)}_{c_n} X^n = 1_{\mathbb{K}}$$

Donc $c_n = 0$ pour $n > 0$ et $c_0 = 1$ pour $n = 0$ mais (par la règle du produit) $c_0 = u_0 v_0 = 0$ ce qui est absurde. D'autre part, la série formelle 1 est le produit de deux séries U et V implique que $u_0 v_0 = 1$ et donc $u_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$. $\square$

Exemple

Sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} X^n$ est l'inverse de la série $1 - X$.

Preuve

Il suffit de constater que

$$\begin{aligned}
(1-X)\sum_{n=0}^{\infty} X^n &= (1-X)(1+X+X^2+X^3+\ldots+X^n+\ldots) \\
&= 1-X+X-X^2+X^2+\ldots-X^n+X^n+\ldots \\
&= 1
\end{aligned}$$

et ensuite le prouver par induction sur $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} X^n \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{1-X}$$

Sommes partielles

Soit $U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ et considérons le produit suivant :

$$U \cdot \frac{1}{1-X} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} X^n$$

en appliquant la règle de la multiplication on trouve

$$\frac{U}{1-X} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right) \cdot X^n$$

Conclusion : multiplier une SF par $\frac{1}{1-X}$ donne la série des sommes partielles de la séquence de départ.

Dérivation de séries formelles

Définition

Soit $U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ une série formelle sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. On définit l'opérateur $D(U)$ (noté aussi U'), appelé dérivée de U, comme suit :

$$D(U) = U' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n n X^{n-1}$$

Propriétés

Soient U, V deux séries formelles et $a, b \in \mathbb{K}$ alors

- $D(a \cdot U + b \cdot V) = a \cdot D(U) + b \cdot D(V)$
- $D(U \cdot V) = U \cdot D(V) + D(U) \cdot V$
- $D(U \circ V) = (D(U) \circ V) \cdot D(V)$

Exemples

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} X^n &= \frac{1}{1-X} \\
D(\sum_{n=0}^{\infty} X^n) &= D(\frac{1}{1-X}) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)X^n = \frac{1}{(1-X)^2} \\
D^2(\sum_{n=0}^{\infty} X^n) &= D\left(\frac{1}{(1-X)^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)X^n = \frac{2}{(1-X)^3} \\
&\vdots \\
D^k(\sum_{n=0}^{\infty} X^n) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} X^n = \frac{k!}{(1-X)^{k+1}}
\end{aligned}
$$

Séries formelles remarquables

$$\sum_{n=0}^{\infty} X^n = \frac{1}{1-X}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot X^n = \frac{1}{1+X}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \cdot X^n = \frac{1}{1-cX} \quad \text{pour tout } c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n \cdot X^n}{n!} = e^{cX} \quad \text{pour tout } c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} X^{2n} = \cos(X)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} X^{2n+1} = \sin(X)$$

La méthode des séries génératrices

La méthode

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_{n+p} & = & b + \sum_{k=1}^{p} a_k \cdot u_{n+p-k} \\ u_{p-1} & = & c_{p-1} \\ & \vdots & \\ u_0 & = & c_0 \end{cases} \tag{11}$$

avec $b, a_1, \ldots, a_p, c_0, \ldots, c_{p-1}$ des constantes dans un corps clos $\mathbb{K}$.
Soit

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$$

la série formelle associée à la solution de notre problème de Cauchy.

(suite...)

$$\begin{aligned}
U &= c_0 + c_1X + \ldots + c_{p-1}X^{p-1} + \sum_{n=p}^{\infty} u_nX^n \\
&= c_0 + c_1X + \ldots + c_{p-1}X^{p-1} + \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+p}X^{n+p} \\
&= c_0 + c_1X + \ldots + c_{p-1}X^{p-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(b + \sum_{k=1}^{p} a_k \cdot u_{n+p-k}\right) X^{n+p} \\
&= c_0 + c_1X + \ldots + c_{p-1}X^{p-1} + \sum_{n=0}^{\infty} bX^{n+p} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{p} a_k \cdot u_{n+p-k}\right) X^{n+p} \\
&= c_0 + c_1X + \ldots + c_{p-1}X^{p-1} + \frac{bX^p}{1-X} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{p} a_k \cdot u_{n+p-k}\right) X^{n+p} \\
&= c_0 + c_1X + \ldots + c_{p-1}X^{p-1} + \frac{bX^p}{1-X} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+p-1}X^{n+p} + \ldots \\
&\qquad \ldots + a_p \sum_{n=0}^{\infty} u_nX^{n+p}
\end{aligned}$$

(suite...)

$$
\begin{aligned}
U &= c_0 + c_1 X + \ldots + c_{p-1} X^{p-1} + \tfrac{bX^p}{1-X} + a_1 X \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+p-1} X^{n+p-1} + \ldots \\
&\qquad \ldots + a_p X^p \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n \\
&= c_0 + c_1 X + \ldots + c_{p-1} X^{p-1} + \tfrac{bX^p}{1-X} + a_1 X \sum_{n=p-1}^{\infty} u_n X^n + \ldots + a_p X^p U \\
&= c_0 + c_1 X + \ldots + c_{p-1} X^{p-1} + \tfrac{bX^p}{1-X} + a_1 X \left(U - c_0 - c_1 X - \ldots \right. \\
&\qquad \left. \ldots - c_{p-2} X^{p-2}\right) + a_2 X^2 \left(U - c_0 - c_1 X - \ldots - c_{p-3} X^{p-3}\right) + \ldots \\
&\qquad \ldots + a_p X^p U
\end{aligned}
$$

Maintenant en portant à gauche tous les termes en U et en factorisant U on obtient

(suite...)

$$
\begin{aligned}
(1 + a_1 X + \ldots + a_p X^p) \cdot U &= \\
= \quad & c_0 + c_1 X + \ldots + c_{p-1} X^{p-1} + \tfrac{bX^p}{1-X} + a_1 X \left(-c_0 - c_1 X - \ldots \right. \\
& \left. \ldots - c_{p-2} X^{p-2}\right) + a_2 X^2 \left(-c_0 - c_1 X - \ldots - c_{p-3} X^{p-3}\right) + \ldots \\
& \ldots - a_{p-1} X^{p-1} c_0
\end{aligned}
$$

et donc si $b \neq 0$

$$
U = \frac{bX^p + (1-x) \sum_{n=0}^{p-1} c_n X^n - (1-x) \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{n=0}^{p-1-k} a_k c_n X^n}{(1-x)\left(1 + a_1 X + \ldots + a_p X^p\right)} \qquad (12)
$$

(suite...)

et si $b = 0$ alors on trouve :

$$U = \frac{\sum_{n=0}^{p-1} c_n X^n - \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{n=0}^{p-1-k} a_k c_n X^n}{1 + a_1 X + \ldots + a_p X^p} \tag{13}$$

Théorème

Si la récurrence d'un problème de Cauchy est linéaire à coefficients constants et le terme non-homogène est aussi constant alors la série génératrice associée est une fonction rationnelle (*i.e.* un rapport entre deux polynômes) dont le degré du dénominateur est strictement supérieur à celui du numérateur.

Le théorème de d'Alembert-Gauss

Connu aussi sous le nom de théorème fondamental de l'algèbre :

Théorème

Tout polynome non constant à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Conséquences importantes

Théorème

Le théorème fondamental de l'algèbre est équivalent à chacun des deux énonces suivants :

- les polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ irréductibles dans $\mathbb{R}$, ces sont exactement les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 dont le déterminant est strictement négatif ;
- tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme produit de polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré 1 ou 2.

Décomposition en éléments simples

Il existe plusieurs versions nous allons considérer celles qui nous intéressent plus de près.

Théorème

Considérons une fraction rationnelle $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} \in \mathbb{C}[X]$ avec $deg(P(X)) < deg(Q(X))$. Si $Q(X) = (X - s_1)^{m_1} \cdot (X - s_k)^{m_k}$ alors

$$F(X) = \sum_{i=1}^{k} F_i \quad \text{avec} \quad F_i = \frac{a_{i,1}}{(X - s_i)} + \frac{a_{i,2}}{(X - s_i)^2} + \ldots + \frac{a_{i,}}{(X - s_i)^{m_i}}$$

En revenant à nous...

Deux conséquences importantes des résultats précédents :

- la fonction génératrice (12) ou (13) est décomposable en somme de fractions du style $\frac{c}{1-\alpha X}$ avec $c, \alpha \in \mathbb{C}$ constantes ;
- le terme général de la récurrence est donnée par la somme des coefficients de position n de chacune des séries formelles représentantes les fractions du point précédent chacune multipliée par son propre coefficient c.

Ceux deux derniers points concluent la méthode.

Utilité des séries génératrices

Théorème

La méthode des séries génératrices résout tout problème de Cauchy basé sur une récurrence linéaire à coefficient constant et terme non-homogène constant.

Théorème

Si deux problèmes de Cauchy ont la même séries génératrice associée alors ils ont la même solution.

Exercices

Exercice 5

Résolvez le problème de Cauchy suivant par la méthode des séries génératrices :

$$\begin{cases} u_n & = & u_{n-1} + 2^n \\ u_0 & = & 1 \end{cases}$$

Exercice 6

Résolvez le problème de Cauchy suivant par la méthode des séries génératrices :

$$\begin{cases} u_n & = & 2u_{n-1} + 1 \\ u_0 & = & 1 \end{cases}$$

Une méthode plus rapide...

Reprenons le problème de Cauchy générique pour des récurrences à coefficients constants sur $\mathbb{K}$:

$$\begin{cases} u_{n+p} & = & b + \sum_{k=1}^{p} a_k \cdot u_{n+p-k} \\ u_{p-1} & = & c_{p-1} \\ & \vdots & \\ u_0 & = & c_0 \end{cases}$$

avec $b, a_1, \ldots, a_p, c_0, \ldots, c_{p-1}$ des constantes dans un corps clos $\mathbb{K}$. et supposons encore une fois que

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$$

la série formelle associée à la solution de notre problème de Cauchy.

(suite...)

Multiplions par X^n le membre de droite et de gauche de la récurrence :

$$u_{n+p}X^n = bX^n + \sum_{k=1}^{p} a_k \cdot u_{n+p-k}X^n$$

Pour chaque valeur de $n \in \mathbb{N}$, nous obtenons une nouvelle équation :

$$\begin{cases} u_p = b + \sum_{k=1}^{p} a_k \cdot u_{p-k} & \text{pour } n = 0 \\ u_{p+1}X = bX + \sum_{k=1}^{p} a_k \cdot u_{p+1-k}X & \text{pour } n = 1 \\ u_{p+2}X^2 = bX^2 + \sum_{k=1}^{p} a_k \cdot u_{p+2-k}X^2 & \text{pour } n = 2 \\ \vdots & \\ u_{p+h}X^h = bX^h + \sum_{k=1}^{p} a_k \cdot u_{p+h-k}X^h & \text{pour } n = h \\ \vdots & \end{cases}$$

(suite...)

Additionnant membre à membre toutes les équations précédentes l'on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+p} X^n = \sum_{n=0}^{\infty} b X^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{p} a_k \cdot u_{n+p-k} X^n$$

et donc :

$$\frac{U - \sum_{k=0}^{p-1} c_k X^k}{X^p} = \frac{b}{1-X} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{p} a_k \cdot u_{n+p-k} X^n$$

(suite...)

Et *in fine* si $p > 1$:

$$\frac{U - \sum_{k=0}^{p-1} c_k X^k}{X^p} = \frac{b}{1-X} + \sum_{k=1}^{p} a_k \frac{U - \sum_{h=0}^{p-k-1} c_h X^h}{X^{p-k}}$$

Pour $p = 1$ on trouve :

$$\frac{U - c_0}{X} = \frac{b}{1-X} + a_1 U$$

A partir d'ici on procède comme pour la méthode précédente.

Exercices

Exercice 7

Reprenez les deux exercices précédents et appliquez la méthode rapide.

Exercice 8

Résolvez le problème de Cauchy suivant par la méthode des séries génératrices :

$$\begin{cases} u_n &= 4u_{n-1} - 3u_{n-2} \\ u_1 &= 1 \\ u_0 &= 0 \end{cases}$$

Exercice 9

Résolvez le problème de Cauchy suivant par la méthode des séries génératrices :

$$\begin{cases} u_n &= u_{n-1} - (-1)^n \\ u_0 &= 1 \end{cases}$$

Quelques uns un peu plus dur...

Exercice 10

Le président commandant général de la République de la pleine lune est tout le temps en train de faire des plans pour étendre son état afin qu'il ait une extension digne de sa grande personne. Ses généraux ont récemment restructuré la grande armée en profondeur. Tellement en profondeur qu'ils sont totalement incapables de comprendre combien de soldats il y a au total compte tenu aussi des morts en guerre et des nouveaux recrutements. Le chef des armées rapporte au président commandant général les faits suivants :

- l'unité de base u_0 compte 2 soldats et on groupe 3 soldats dans u_1 ;
- puis les niveaux successifs sont obtenus par la formule suivante :

$$u_{n+2} = u_{n+1} - u_n + n \cdot \pi$$

  qui donne le nombre moyen de soldats (en faisant le bilan des tués en bataille et de ceux qui sont nouvellement recrutés tous les jours).

Sauriez-vous communiquer au président commandant général de combien de soldats il dispose en moyenne et combien de niveaux il faut remplir pour pouvoir disposer d'au moins 12000 soldats à tout instant ?

(suite...)

Exercice 11

Résolvez le problème de Cauchy suivant par la méthode des séries génératrices :

$$\begin{cases} u_n & = & 3u_{n-1} + n^2 \\ u_0 & = & 1 \end{cases}$$

Récurrences non-linéaires

Récurrences de Riccati

Les récurrences de Riccati ont la forme suivante :

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cU_n + d} \tag{14}$$

avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$ (car sinon elle dévient soit d'ordre 1, soit constante).

- se résolvent par substitution
- parmi les peu de récurrences non-linéaires que l'on sait résoudre analytiquement
- intervient dans certains cas de contrôle non-linéaire en physique

Récurrences de Riccati : résolution

Si on remplace u_n par $\frac{(a+d)v_n - d}{c}$ dans la (14) alors on trouve :

$$v_{n+1} = 1 - \frac{ad - bc}{(a+d)^2} \cdot \frac{1}{v_n}$$

maintenant en substituant $v_n = \frac{z_{n+1}}{z_n}$ on a

$$z_{n+2} = z_{n+1} - Rz_n \quad \text{avec } R = \frac{ad - bc}{(a+d)^2}$$

Les cycles de Lyness [2, 3, 5]

Les récurrences suivantes admettent des suites périodiques :

$u_{n+1}u_{n-1} + p = -u_n(u_{n-1} + u_{n+1})$	période 3
$u_{n+1}u_{n-1} + p = u_n(u_{n-1} + u_n + u_{n+1})$	période 4
$u_{n+1}u_{n-1} + p = u_n(u_{n-1} + 2u_n + u_{n+1})$	période 6
$u_{n+1}u_{n-1} - p^2 = pu_n$	période 5
$u_{n+3}u_n = u_{n+2} + u_{n+1} + 1$	période 8

Question

Est-ce que l'on peut fabriquer une séquence de période 7 intéressante ?

Pour se convaincre...

Fixons $u_0 = a, u_1 = b$ avec $p, a, b \in \mathbb{R}$. Alors d'après la relation de récurrence :

$$au_2 + p = -b(a + u_2)$$

et donc $u_2 = -\frac{p+ab}{a+b}$. Alors :

$$\begin{aligned} bu_3 + p &= \tfrac{p+ab}{a+b}(b + u_3) \\ abu_2 + b^2u_3 + ap + bp &= bp + ab^2 = pu_3 + abu_3 \end{aligned}$$

en collectant u_3 à gauche et le reste à droite :

$$(b^2 - p)u_3 = a(b^2 - p)$$

c'est-à-dire $u_3 = a$.

La machine de Burnside

William Burnside a montré que si l'on prend $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-3} \in \mathbb{R}$ alors la substitution : $\alpha'_1 = \alpha_2, \alpha'_2 = \alpha_3, \ldots, \alpha'_{n-4} = \alpha_{n-3}$ et

$$\alpha'_{n-3} = -1 + \cfrac{\alpha_{n-3}}{-1 + \cfrac{a_{n-4}}{\ddots \atop -1 + \cfrac{}{-1 + \frac{\alpha_1}{-1}}}}$$

produit un groupe cyclique d'ordre n (voir [5, 4]).

La réponse

$$u_{n-5}(u_{n-3}u_{n-1} + u_{n-2} - 1) + (u_{n-4} - 1)(u_{n-2} + u_{n-1} - 1) = 0 \quad \text{période } 7$$

La variante de Çinar [6]

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} c_{n+1} & = & \frac{c_{n-1}}{1+c_n c_{n-1}} \\ c_0 & = & a \\ c_{-1} & = & b \end{cases}$$

La solution est :

$$c_n = \begin{cases} \frac{a\prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}[(2k+1)ab+1]}{\prod_{k=0}^{\frac{n}{2}}(2abk+1)} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{b\prod_{k=0}^{\frac{n+1}{2}-1}(2abk+1)}{\prod_{k=0}^{\frac{n+1}{2}-1}[(2k+1)ab+1)]} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

(Suite...)

Théorème (Çinar)

Le réel 0 est le seul point d'équilibre.

Corollaire (Çinar)

Si $c_{-1}, c_0 \in [0,1]$ alors $c_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercices

Exercice 12

Trouvez la solution au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_n & = 2u_{n-1} + u_{n-1}^2 \\ u_0 & = 1 \end{cases}$$

Exercice 13

Trouvez la solution au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_n & = \frac{u_{n-1}}{1+u_{n-1}} \\ u_0 & = 1 \end{cases}$$

Références I

[1] V.L. Kocic, G. Ladas, and I.W. Rodrigues.
On rational recursive sequences.
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 173(1) :127–157, 1993.

[2] Robert Cranston Lyness.
Note 1581. Cycles.
The Mathematical Gazette, 26(268) :62, 1942.

[3] Robert Cranston Lyness.
Note 1847. Cycles.
The Mathematical Gazette, 29(287) :231–233, 1945.

[4] Robert Cranston Lyness.
Note 2952. Cycles.
The Mathematical Gazette, 45(353) :207–209, 1961.
Teacher of maths in UK.

Références II

[5] Walter Warwick Sawyer.
Note 2951. Lyness' periodic sequence.
The Mathematical Gazette, 45(353) :207, 1961.

[6] Cengiz Çinar.
On the positive solutions of the difference equation system $x_{n+1} = x_{n-1} = 1/(x_n x_{n-1})$.
Applied Mathematics and Computation, 158(2) :303–305, 2004.